Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 31 (Übung)

a) Untersuchen Sie, ob die Kurve

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$$

regulär ist und berechnen Sie gegebenenfalls die natürliche Parametrisierung von γ.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $r \in (0, \infty)$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^r & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von r) alle $x \in \mathbb{R}^n$, in denen f (partiell) differenzierbar ist und geben Sie $\nabla f(x) := \operatorname{grad} f(x)$ für diese x an.

Lösungsvorschlag:

a) Es ist

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Damit ist γ regulär. Ferner ist für $t \in [0,1]$ die Kurvenlängenfunktion

$$s(t) := \int_0^t \|\gamma'(s)\|\, ds = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2(s)}\, ds = \int_0^t \cosh(s)\, ds = \sinh(t)|_0^t = \sinh(t).$$

Damit ist $s^{-1}\colon [0, \sinh(1)] \to [0,1]$, $s^{-1}(t) = \sinh^{-1}(t)$ und die natürliche Parametrisierung von γ gegeben durch

$$\gamma_0\colon [0, \sinh(1)] \to \mathbb{R}^2, \gamma_0(t) = \gamma(s^{-1}(t)) = \begin{pmatrix} \sinh^{-1}(t) \\ \cosh(\sinh^{-1}(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh^{-1}(t) \\ \sqrt{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

b) Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ gilt

$$f(x) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{r}{2}},$$

sodass für diese x nach der (eindimensionalen) Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{r}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{r}{2}-1} 2x_j = r x_j \|x\|^{r-2} \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Somit gilt für $x \neq 0$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = \left(r x_1 \|x\|^{r-2}, \ldots, r x_n \|x\|^{r-2} \right) = r\|x\|^{r-2} x^T.$$

Da die partiellen Ableitungen in $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig sind, folgt aus Satz 19.7, dass f in allen Punkten $x \neq 0$ differenzierbar ist mit

$$f'(x) = \nabla f(x).$$

Für den Punkt $x = 0$ führen wir die Fallunterscheidung $r \in (0,1)$, $r = 1$ und $r \in (1, \infty)$ durch. Im Folgenden bezeichne wie immer $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^n$.

- 1. Fall: $r \in (0,1)$
  Für $t \neq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist

  $$\left| \frac{f(0 + te_j) - f(0)}{t} \right| = \frac{|t|^r}{|t|} = \frac{1}{|t|^{1-r}} \longrightarrow \infty \quad (t \to 0),$$

  da nach Voraussetzung $r < 1$, also $1 - r > 0$ ist. Für alle $j \in \{1, \ldots n\}$ existiert somit $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$ nicht, d.h., f ist nicht partiell differenzierbar in 0. Nach Satz 19.6 ist damit f in 0 nicht differenzierbar.

- 2. Fall: $r = 1$
  Für $t \neq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist dann

  $$\frac{f(0 + te_j) - f(0)}{t} = \frac{|t|}{t} = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0, \\ -1 & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

  und deshalb die einseitigen Grenzwerte

  $$\lim_{t \to 0+} \frac{f(0 + te_j) - f(0)}{t} = 1 \neq \lim_{t \to 0-} \frac{f(0 + te_j) - f(0)}{t} = -1.$$

  nicht gleich. Für alle $j \in \{1, \ldots n\}$ existiert somit $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$ nicht, d.h., f ist nicht partiell differenzierbar in 0. Nach Satz 19.6 ist damit f in 0 nicht differenzierbar.

- 3. Fall: $r \in (1, \infty)$
  Für $t \neq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist dann

  $$\left| \frac{f(0 + te_j) - f(0)}{t} \right| = \frac{|t|^r}{|t|} = |t|^{r-1} \longrightarrow 0 \quad (t \to 0),$$

  da nach Voraussetzung $r > 1$, also $r - 1 > 0$ ist. Für alle $j \in \{1, \ldots n\}$ existiert somit $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$ und es gilt

  $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0 \quad \text{für } j \in \{1, \ldots, n\},$$
  $$\nabla f(0) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Schließlich untersuchen wir, ob f in 0 differenzierbar ist. Wir setzen $A := \nabla f(0) = 0 \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Für $x \neq 0$ gilt dann

$$\frac{f(x) - f(0) - Ax}{\|x\|} = \frac{\|x\|^r}{\|x\|} = \|x\|^{r-1} \longrightarrow 0 \quad (x \to 0),$$

da $r > 1$ nach Voraussetzung. Also ist f in 0 differenzierbar und es gilt

$$f'(0) = A = 0 \in \mathbb{R}^{1\times n}.$$

Aufgabe 32 (Tutorium)

a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Ferner sei $x_0 \in D$. Fügen Sie (mit Begründung) Implikationspfeile zwischen den unten stehenden Aussagen ein, sodass die dadurch entstehenden Implikationen korrekt sind.

$\boxed{\text{$f$ ist partiell differenzierbar auf D und alle partiellen Ableitungen sind stetig in x_0.}}$ $\boxed{\text{$f$ ist differenzierbar in x_0.}}$ $\boxed{\text{$f$ ist stetig in x_0.}}$

$\boxed{\text{$f$ ist partiell differenzierbar in x_0.}}$ $\boxed{\text{$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ existiert für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.}}$

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Zeigen Sie: Existiert $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ für ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $x_0 \in D$, so gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha v)}(x_0) = \alpha \frac{\partial f}{\partial v}(x_0).$$

Lösungsvorschlag:

a) Es gilt

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{f ist partiell differenzierbar auf D und alle partiellen Ableitungen sind stetig in x_0.}} \arrow[r, Rightarrow, "\text{Satz 19.7}"] \arrow[d, Rightarrow, "\text{Satz 19.6(2)}"] & \boxed{\text{f ist differenzierbar in x_0.}} \arrow[r, Rightarrow, "\text{Satz 19.6(1)}"] \arrow[d, Rightarrow, "\text{Satz 19.6(3)}"] & \boxed{\text{f ist stetig in x_0.}} \\
\boxed{\text{f ist partiell differenzierbar in x_0.}} & \boxed{\text{$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ existiert für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.}} \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Die Umkehrung jeder der obigen Implikationen ist im Allgemeinen falsch.

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, sodass $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ für ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $x_0 \in D$ existiert. Sei ferner $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig, aber fest. Wir müssen zeigen, dass $\frac{\partial f}{\partial(\alpha v)}(x_0)$, d.h., der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha v) - f(x_0)}{t} \tag{$*$}$$

existiert. Sei hierfür $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullfolge mit $t_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\alpha \neq 0$ ist, ist dann auch $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\alpha t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullfolge mit $s_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ existiert, folgern wir

$$\frac{f(x + t_n\alpha v) - f(x_0)}{t_n} = \alpha\frac{f(x + t_n\alpha v) - f(x_0)}{t_n\alpha} = \alpha\frac{f(x + s_n v) - f(x_0)}{s_n} \longrightarrow \alpha\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \quad (n \to \infty).$$

Da die Nullfolge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, beliebig gewählt war, folgt, dass der Grenzwert in $(*)$ existiert und gleich $\alpha\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ ist. Damit gilt

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha v)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\alpha v) - f(x_0)}{t} = \alpha\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$

und die Aussage ist bewiesen.

Aufgabe 33 (Übung)

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0).$$

Ist dies ein Widerspruch zum Satz von Schwarz (Satz 19.8)? Begründen Sie.

b) In diesem Aufgabenteil sollen Sie die Aussagen (1) und (2) des Satzes 19.6 beweisen: Seien nun $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in D$ differenzierbar. Zeigen Sie:

(i) f ist in x_0 stetig.

(ii) Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = J_f(x_0) \cdot v,$$

wobei $J_f(x_0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Jacobimatrix von f an der Stelle x_0 bezeichnet.

Lösungsvorschlag:

a) Wir berechnen die partiellen Ableitungen von f. Für $(x,y) \neq (0,0)$ folgt aus der Quotientenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

Für den Punkt $(0,0)$ erhalten wir wegen $f(x,0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Für $y \neq 0$ haben wir $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ und damit

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \frac{-y-0}{y} = -1$$

Es folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

Wegen $f(x,y) = -f(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ folgt ferner

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$$

und damit auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(y,x)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere folgt somit für $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -(-1) = 1,$$

also

$$1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

Dies ist kein Widerspruch zum Satz von Schwarz (Satz 19.8), da $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (und auch $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$) *nicht* stetig in $(0,0)$ sind: Für $(x,y) \neq 0$ kann man nämlich nachrechnen, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}$$

und daher

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = 1, \quad \text{aber} \quad \lim_{y \to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,y) = -1$$

gilt. Damit ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in $(0,0)$ nicht stetig. Wir sehen also, dass man im Allgemeinen nicht auf die Stetigkeit von $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ verzichten kann, wenn man die Differentiationsreihenfolge vertauschen möchte.

(i) Sei f in x_0 differenzierbar. Wir definieren

$$g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \; g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

wobei $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Ableitung von f in x_0 ist. Aus Beispiel (2) auf S.65, Skript, folgt, dass g stetig in x_0 (sogar auf ganz $\mathbb{R}^n$) ist. Aus der Differenzierbarkeit von f folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{\|x - x_0\|} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

und damit erst recht

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - g(x)}{\|x - x_0\|}}_{\to 0} \underbrace{\|x - x_0\|}_{\to 0} = 0. \qquad (*)$$

Wegen $g(x_0) = f(x_0)$ folgern wir nun

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \underbrace{\|f(x) - g(x)\|}_{\to 0 \text{ nach } (*)} + \underbrace{\|g(x) - g(x_0)\|}_{\to 0, \text{ da } g \text{ stetig in } x_0} \longrightarrow 0 \quad (x \to x_0).$$

Damit ist

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

und f in x_0 in stetig.

(ii) Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - J_f(x_0) \cdot v = \underbrace{\operatorname{sgn}(t)\|v\|}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - J_f(x_0) \cdot tv}{\|tv\|} \right)}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

für $t \to 0$. Dies bedeutet, dass $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ existiert und dass

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = J_f(x_0) \cdot v$$

gilt. Damit ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 34 (Tutorium)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x) := \begin{cases} \|x\|^2 \sin\left(\frac{1}{\|x\|}\right) & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

im Punkt $x_0 := 0$ zwar differenzierbar, aber die partiellen Ableitungen von f in x_0 nicht stetig sind.

Lösungsvorschlag: Wir berechnen die partiellen Ableitungen von f an der Stelle $(0, 0)$: Für $x_1 \neq 0$ gilt

$$\left| \frac{f(x_1, 0) - f(0, 0)}{x_1} \right| = \left| \frac{x_1^2 \sin(|x_1|^{-1})}{x_1} \right| \leq |x_1| \longrightarrow 0 \quad (x_1 \to 0).$$

Daher existiert $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0)$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = 0.$$

Da $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt, muss dann auch $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0)$ existieren und

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = 0$$

gelten. Damit ist unser Kandidat für $f'(0)$ durch

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) \right) = (0, 0) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

gegeben. Wir weisen nun nach, dass f tatsächlich in $(0,0)$ differenzierbar ist und dass $f'(0,0) = A = (0,0)$ gilt. Dazu bemerken wir, dass für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\frac{\|f(x) - f(0) - Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \|x\| |\sin(\|x\|^{-1})| \leq \|x\| \to 0 \quad (x \to 0).$$

Also ist f in $(0,0)$ differenzierbar und es gilt $f'(0,0) = A = (0,0)$. Schließlich weisen wir nach, dass f nicht stetig partiell differenzierbar ist. Dazu berechnen wir für $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ mit Hilfe der (eindimensionalen) Produkt- und Kettenregel und Aufgabe 31 b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\|x\|^2\right) \sin(\|x\|^{-1}) + \|x\|^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \sin(\|x\|^{-1}) \\
&\overset{31\text{ b)}}{=} 2x_1 \sin(\|x\|^{-1}) + \|x\|^2 \frac{-x_1}{\|x\|^3} \cos(\|x\|^{-1}) \\
&= 2x_1 \sin(\|x\|^{-1}) - \frac{x_1}{\|x\|} \cos(\|x\|^{-1}).
\end{aligned}$$

Wie oben folgt aus Symmetriegründen genauso

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 \sin(\|x\|^{-1}) - \frac{x_2}{\|x\|} \cos(\|x\|^{-1})$$

für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Wir zeigen nun, dass die partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$ nicht stetig sind: Wir definieren $t_n := (n\pi)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, und setzen

$$(x_{1,n}, x_{2,n})_{n\in\mathbb{N}} := \frac{1}{\sqrt{2}}(t_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Dann gilt $(x_{1,n}, x_{2,n}) \to (0,0)$ für $n \to \infty$, aber

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{1,n}, x_{2,n}) = \sqrt{2}(n\pi)^{-1} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^n = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{n+1} \not\to 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0). \tag{$*$}$$

Somit kann $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ nicht stetig in $(0,0)$ sein. Gleiches gilt auch für $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, da wir aus Symmetriegründen x_1 und x_2 in $(*)$ vertauschen können. Also haben wir nachgewiesen, dass f nicht stetig partiell differenzierbar in $x = (0,0)$ ist.

Bemerkung: Nach Satz 19.7 ist die Stetigkeit der partiellen Ableitungen eine hinreichende Bedingung für (totale) Differenzierbarkeit. Die Funktion f in dieser Aufgabe zeigt allerdings, dass die Stetigkeit der partiellen Ableitungen keine *notwendige* Bedingung für Differenzierbarkeit ist.

Aufgabe 35 (Übung)

Seien $n \in \mathbb{N}, p \in (0, \infty)$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass

$$\begin{aligned}
&(i)\ f(\alpha x) = \alpha^p f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0, \\
&(ii)\ M := \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \in (0, \infty).
\end{aligned}$$

Wir wollen in dieser Aufgabe nun die Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit von f an der Stelle $x = 0$ in Abhängigkeit von p untersuchen. Zeigen Sie:

a) $f(0) = 0$ und $|f(x)| \leq M\|x\|^p$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Folgern Sie, dass f stetig in $x = 0$ ist.
b) Seien $p \in (0,1)$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann existiert $\frac{\partial f}{\partial v}(0)$ genau dann, wenn $f(v) = f(-v) = 0$ gilt. In diesem Fall ist $\frac{\partial f}{\partial v}(0) = 0$. Weiterhin ist f in 0 nicht differenzierbar.

c) Seien nun $p = 1$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann existiert $\frac{\partial f}{\partial v}(0)$ genau dann, wenn $f(-v) = -f(v)$ gilt. In diesem Fall gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0) = f(v)$. Weiterhin ist f in $x = 0$ genau dann differenzierbar, wenn f linear ist.

d) Sei schließlich $p \in (1, \infty)$. Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ differenzierbar ist mit $f'(0) = 0$.

Lösungsvorschlag:

a) Wählen wir $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ beliebig, so folgt $f(0) = f(\alpha \cdot 0) = \alpha^p f(0)$, was nur dann möglich ist, wenn $f(0) = 0$. Für $x = 0$ gilt deshalb auch trivialerweise $\|f(x)\| \leq M\|x\|^p$. Für $x \neq 0$ folgt aber auch

$$|f(x)| = \left| f\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) \right| \overset{(i)}{=} \|x\|^p \left| f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right| \overset{(ii)}{\leq} M\|x\|^p.$$

Insbesondere folgt hieraus

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq M\|x\|^p \to 0 \quad (x \to 0).$$

Somit ist f in 0 stetig.

b) Seien $p \in (0, 1)$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Für $t \neq 0$ ist

$$\frac{f(tv) - f(0)}{t} = \frac{f\left(|t| \operatorname{sgn(t)} v\right)}{t} \overset{(i)}{=} \frac{|t|^p}{t} f(\operatorname{sgn(t)} v) = \frac{\operatorname{sgn(t)} f(\operatorname{sgn(t)} v)}{|t|^{1-p}} = \begin{cases} |t|^{-(1-p)} f(v) & \text{für } t > 0, \\ -|t|^{-(1-p)} f(-v) & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Da $p < 1$ ist,existiert $\lim_{t \to 0} t^{-(1-p)}$ nicht. Wir folgern

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} \text{ existiert } \iff \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sgn(t)} f(\operatorname{sgn(t)} v)}{|t|^{1-p}} \text{ existiert } \iff f(-v) = f(v) = 0.$$

In diesem Fall ist dann

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = f(v) = 0.$$

Wenn f in 0 differenzierbar wäre, so müssten nach Satz 19.6 alle Richtungsableitungen existieren. Nach dem bereits Bewiesenen müsste dann $f(v) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, also $f = 0$ sein. Dann wäre aber $M = 0$, im Widerspruch zu (ii).

c) Seien nun $p = 1$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Für $t \neq 0$ ist dann

$$\frac{f(tv) - f(0)}{t} = \frac{f(|t|\operatorname{sgn(t)} v)}{t} = \operatorname{sgn(t)} f(\operatorname{sgn(t)} v) = \begin{cases} f(v) & \text{für } t > 0, \\ -f(-v) & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Somit gilt

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = f(v) \text{ und } \lim_{t \to 0-} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = -f(-v).$$

Deshalb sehen wir, dass

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} \text{ existiert } \iff \lim_{t \to 0+} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0-} \frac{f(tv) - f(0)}{t} \iff f(v) = -f(-v).$$

und dass in diesem Fall

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = f(v).$$

ist. Wir zeigen nun

$$f \text{ ist in } 0 \text{ differenzierbar.} \iff f \text{ ist linear.}$$

„$\Rightarrow$“: Sei f differenzierbar. Dann existiert ein $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ mit

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - Ax}{\|x\|} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Ax}{\|x\|} = 0. \tag{$*$}$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$. Wir definieren $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} := (\frac{1}{k}x)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\|x_k\| = \frac{1}{k}\|x\| = \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und deshalb

$$(1)\ \frac{x_k}{\|x_k\|} = x \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

$$(2)\ x_k \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty).$$

Nun erhalten wir aus (1), (2), $(*)$ und (i)

$$f(x) - Ax \overset{(1)}{=} f\left(\frac{x_k}{\|x_k\|}\right) - A\left(\frac{x_k}{\|x_k\|}\right) \overset{(i)}{=} \frac{f(x_k) - Ax_k}{\|x_k\|} \xrightarrow[(2)]{(*)} 0 \quad (k \to \infty),$$

also $f(x) - Ax = 0$ bzw. $f(x) = Ax$. Da $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$ beliebig gewählt war, folgern wir

$$f(x) = Ax \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\| = 1. \tag{$**$}$$

Obige Gleichung gilt tatsächlich für alle $x \in \mathbb{R}^n$: Für $x = 0$ ist die Gleichheit klar, da $f(0) = 0$ nach Aufgabenteil a) ist. Für $x \neq 0$ hat $\frac{x}{\|x\|}$ Norm 1 und damit

$$f(x) = f\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right) \overset{(i)}{=} \|x\|\, f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \overset{(**)}{=} \|x\|\, A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = Ax.$$

Also gilt

$$f(x) = Ax \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

d.h., f ist linear.

„$\Leftarrow$“: Dies folgt unmittelbar aus Beispiel (4) auf Seite 79, Skript.

d) Seien schließlich $p \in (1, \infty)$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Für $t \neq 0$ ist

$$\frac{f(tv) - f(0)}{t} = \frac{f(|t|\,\mathrm{sgn(t)}v)}{t} \overset{(i)}{=} \frac{|t|^p}{t} f(\mathrm{sgn(t)}v) = \underbrace{\mathrm{sgn(t)} f(\mathrm{sgn(t)}v)}_{\text{beschränkt}} |t|^{p-1} \longrightarrow 0 \quad (t \to 0),$$

da $p > 1$ gilt. Also gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = 0.$$

Wir setzen $A := 0 \in \mathbb{R}^{1\times n}$ und behaupten $f'(0) = A$. In der Tat, für $x \neq 0$ gilt wegen $p > 1$

$$\left\| \|x\|^{-\frac{1}{p}} x \right\| = \|x\|^{1-\frac{1}{p}} \to 0 \quad (x \to 0),$$

womit aus der in a) gezeigten Stetigkeit von f in 0

$$\frac{f(x) - f(0) - Ax}{\|x\|} = \frac{f(x)}{\|x\|} \overset{(i)}{=} f\left(\|x\|^{-\frac{1}{p}} x\right) \longrightarrow 0 \quad (x \to 0),$$

folgt. Also ist f differenzierbar in 0 und es gilt $f'(0) = A = 0$.

Aufgabe 36 (Tutorium)

Gegeben seien die Funktionen $f_1, f_2, f_3, f_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_1(0,0) = f_2(0,0) = f_3(0,0) = f_4(0,0) := 0$ und

$$f_1(x,y) = \frac{x + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_2(x,y) = \frac{|x|^{\frac{1}{2}} x + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f_3(x,y) = \frac{(x+y)^2 (x-y)}{x^2 + y^2}, \quad f_4(x,y) = \frac{(x+y)^2 |x-y|^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^2}$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Untersuchen Sie, ob die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 im Punkt $(0,0)$ differenzierbar sind.

Lösungsvorschlag:

1. Die Funktion f_1 ist in $(0,0)$ nicht stetig. Wir beweisen dies per Widerspruch. Angenommen, f_1 wäre in $(0,0)$ stetig. Wir definieren die Funktion

$$i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, i(x) = (x,0).$$

Da i stetig ist, müsste nach Satz 19.4 dann auch die Komposition $f \circ i$ in $x = 0$ stetig sein. Wie man leicht nachrechnet, ist aber

$$(f \circ i)(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Daher kann $f_1 \circ i$ in 0 nicht stetig sein. Widerspruch.
Da die Differenzierbarkeit einer Funktion ihre Stetigkeit impliziert (vgl. Satz 19.6(1)), ist f_1 in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

2. Die Funktion f_2 ist in $(0,0)$ nicht nach x partiell differenzierbar: Für $x \neq 0$ gilt

$$\left| \frac{f_2(x,0) - f_2(0,0)}{x} \right| = \left| \frac{f_2(x,0)}{x} \right| = \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{|x|} = \frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow \infty \quad (x \to 0).$$

Also existiert $\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)$ nicht. Nach Satz 19.6(2) kann damit f_2 in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein.

3. Wir berechnen die partiellen Ableitungen von f_3 in $(0,0)$. Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{f_3(x,0) - f_3(0,0)}{x} = \frac{f_3(x,0)}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$

Hieraus folgt sofort

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_3(x,0) - f_3(0,0)}{x} = 1.$$

Wegen $f_3(x,y) = -f_3(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ folgt genauso

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0) = -1.$$

Somit ist der Kandidat für $f_3'(0,0)$ durch

$$A = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0) \right) = (1,-1) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

gegeben. Allerdings ist f_3 nicht differenzierbar: Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ eine beliebige Nullfolge. Wir setzen

$$(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (-t_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt $(x_n,y_n) \to (0,0)$ für $n\to\infty$, aber $f_3(x_n,y_n) = 0$ und $A(x_n,y_n) = x_n - y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\frac{f_3(x_n,y_n) - f_3(0,0) - A(x_n,y_n)}{\|(x_n,y_n)\|} = \frac{y_n - x_n}{\|(x_n,y_n)\|} = \frac{2t_n}{\sqrt{2}t_n} = \sqrt{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_3(x_n,y_n) - f_3(0,0) - A(x_n,y_n)}{\|(x_n,y_n)\|} = \sqrt{2} \neq 0.$$

Also ist f_3 in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

4. Die Funktion f_4 ist in $(0,0)$ differenzierbar. Für $x \neq 0$ gilt

$$\left| \frac{f_4(x,0) - f_4(0,0)}{x} \right| = \left| \frac{f_4(x,0)}{x} \right| = \frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{|x|} = |x|^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad (x \to 0).$$

Damit existiert $\frac{\partial f_4}{\partial x}(0,0)$ und es gilt

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Wegen $f_4(x,y) = f_4(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt auch

$$\frac{\partial f_4}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Somit ist unser Kandidat für $f_4'(0,0)$ durch

$$A := \left(\frac{\partial f_4}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f_4}{\partial y}(0,0) \right) = (0,0) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

gegeben. Wir weisen nun nach, dass f_4 in $(0,0)$ differenzierbar ist und dass $f_4'(0,0) = A = (0,0)$ gilt. Wegen

$$\frac{f_4(x,y) - f_4(0,0) - A(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{f_4(x,y)}{\|(x,y)\|} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

müssen wir hierfür

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_4(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0 \tag{$*$}$$

zeigen. Es ist $f_4 = g \circ S$, wobei g die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(u,v) := \begin{cases} 2\frac{u^2|v|^{\frac{3}{2}}}{\|(u,v)\|^2} & \text{für } (u,v) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (u,v) = (0,0), \end{cases}$$

und S die bijektive lineare Transformation

$$S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, S(x,y) = (x+y, x-y)$$

ist. Wegen $\|S(x,y)\| = 2^{\frac{1}{2}}\|(x,y)\|$ ist

$$\frac{f_4(x,y)}{\|(x,y)\|} = 2^{\frac{1}{2}} \frac{g(S(x,y))}{\|S(x,y)\|} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

und daher die Gleichung $(*)$ äquivalent zu

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} 2^{\frac{1}{2}} \frac{g(u,v)}{\|(u,v)\|} = 0 \iff \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{g(u,v)}{\|(u,v)\|} = 0.$$

Nun ist aber für $(u,v) \neq (0,0)$

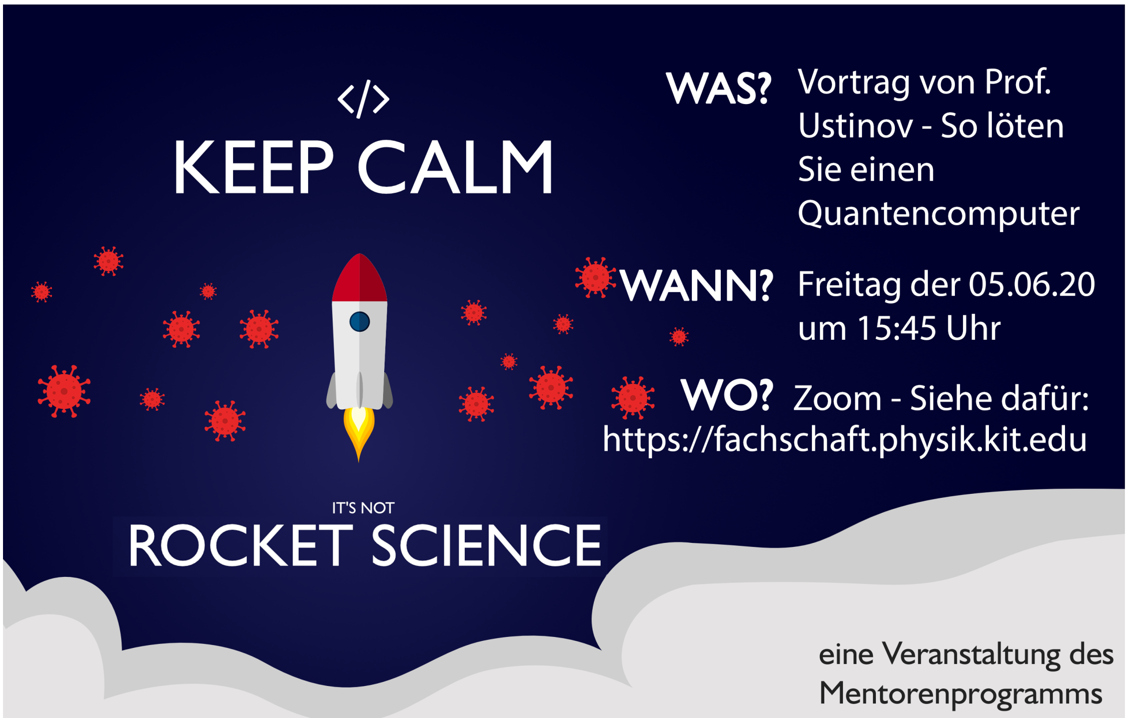
$$\frac{g(u,v)}{\|(u,v)\|} = \frac{2u^2|v|^{\frac{3}{2}}}{\|(u,v)\|^3} = 2 \underbrace{\frac{u^2}{\|(u,v)\|^2}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{|v|}{\|(u,v)\|}}_{\leq 1} |v|^{\frac{1}{2}} \leq 2|v|^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } (u,v) \to (0,0)$$

und damit

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{g(u,v)}{\|(u,v)\|} = 0.$$

Somit ist f_4 in $(0,0)$ differenzierbar.

Eine Information Ihrer Fachschaft:



https://fachschaft.physik.kit.edu/drupal/content/mentorenprogramm-ss-20