

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 37 (Übung)

a) Seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Ferner seien

$$P: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, P(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

die Polarkoordinatenabbildung und $F: G \rightarrow \mathbb{R}, F = f \circ P$, wobei $G \subseteq (0, \infty) \times \mathbb{R}$ eine offene Menge mit $P(G) \subseteq D$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass

$$(\Delta f)(P(r, \varphi)) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right)(r, \varphi) \quad \text{für alle } (r, \varphi) \in G,$$

wobei

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

b) Sei nun $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log(\|x\|)$. Berechnen Sie Δf mit Hilfe von Aufgabenteil a).

Bemerkung: Die Abbildung $\Delta: C^2(D, \mathbb{R}) \rightarrow C(D, \mathbb{R}), f \mapsto \Delta f$ heißt *Laplace-Operator* und taucht z.B. in der Wellen-, Wärmeleitungs- und Schrödingergleichung auf.

Aufgabe 38 (Tutorium)

Seien Funktionen f, g, h definiert durch

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) := (x^2 + y^2, z^2), \\ g: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y) := (\sin(xy), e^{x+y}), \\ h: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) := \cosh(x) + 3y. \end{aligned}$$

- Berechnen Sie f', g' und h' .
- Berechnen Sie $(g \circ f)'$ und $(h \circ g)'$ mit Hilfe der Kettenregel.
- Berechnen Sie $(g \circ f)'$ und $(h \circ g)'$, indem Sie explizit $(g \circ f)$ und $(h \circ g)$ bestimmen und dann ableiten.

Aufgabe 39 (Übung)

- a) Zeigen Sie, dass sich der Mittelwertsatz (Satz 19.13) nicht auf vektorwertige Funktionen verallgemeinern lässt.

Hinweis: Betrachten Sie hierfür die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

und finden Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $f(b) - f(a) \neq f'(\xi)(b - a)$ für alle $\xi \in (a, b)$.

- b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Ist $K \subseteq D$ kompakt und konvex, so existiert ein $C > 0$, sodass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in K.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $m = 1$ und nutzen hierfür die Sätze 19.13 und 19.18.

Aufgabe 40 (Tutorium)

Wir betrachten die Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cosh(x) \cos(y) \\ \sinh(x) \sin(y) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 \\ \sinh(y) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \ni (\log(2), \frac{\pi}{2})$ und eine offene Menge $V \ni (0, \frac{3}{4})$ gibt, sodass $f|_U: U \rightarrow V$ bijektiv ist und $(f|_U)^{-1}$ stetig differenzierbar ist. Berechnen Sie die Ableitung von $(f|_U)^{-1}$ im Punkt $(0, \frac{3}{4})$.
- b) Untersuchen Sie, ob f global invertierbar ist, d.h., ob $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bijektiv ist.
- c) Gibt es offene Umgebungen $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(0, 0)$, sodass $g|_U: U \rightarrow V$ bijektiv ist?

Aufgabe 41 (Übung)

- a) Gegeben sei das folgende Gleichungssystem in drei Variablen x, y, z :

$$(*) \quad \begin{cases} e^z + \tan(y) = 1, \\ x^3 + x + z^2 = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ von 0 und eine stetig differenzierbare Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(0) = (0, 0)$ gibt, sodass $(g(z), z) = (g_1(z), g_2(z), z)$ für jedes $z \in U$ eine Lösung des Gleichungssystems $(*)$ ist. Bestimmen Sie zusätzlich $g'(0)$.

- b) In diesem Aufgabenteil wollen wir Aussage 19.12 (4) herleiten: Es seien $n, p, m \in \mathbb{N}$ mit $n = p + m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ferner nehmen wir an, dass es offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^p$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $U \times V \subseteq D$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g: U \rightarrow D$ gibt, sodass

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in U. \quad (1)$$

Zeigen Sie: Falls $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, g(x_0))$ für ein $x_0 \in U$ invertierbar ist, gilt

$$g'(x_0) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, g(x_0)) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, g(x_0)),$$

Hinweis: Differenzieren Sie (1) nach x mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 42 (Tutorium)

Betrachten Sie die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1 \quad (*)$$

mit $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass obige Gleichungen in einer Umgebung von $(0, 0, 1, 1)$ nach u, v auflösbar sind, d.h., zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(0, 0)$ und eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(1, 1)$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g: U \rightarrow V$ gibt, sodass

$$(x, y, u, v) \in U \times V \text{ löst } (*) \iff (u, v) = g(x, y).$$

Berechnen Sie weiterhin $g'(0, 0)$.

Aufgabe 43 (Übung)

a) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der folgenden Funktionen.

(i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 - 3$

(ii) $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = \cos(x) \cos(y)$

b) Sei nun $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) := \sqrt{1 + x_1 + x_2}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom erster Ordnung mit Entwicklungstelle $0 \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{T}_1 f(x; 0) := f(0) + f'(0)x, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

und zeigen Sie mit Hilfe von Satz 19.15, dass

$$|f(x) - \mathcal{T}_1 f(x; 0)| \leq \frac{1}{4} \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 44 (Tutorium)

In dieser Aufgabe greifen wir nochmal das lineare Ausgleichsproblem aus Aufgabe 6 auf: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann sind wir an $x_0 \in \mathbb{R}^n$ interessiert mit der Eigenschaft, dass

$$\|y - Ax_0\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - Ax\|.$$

Da $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - Ax\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - Ax\|^2$ gilt, wollen wir hierzu die (lokalen) Minima der Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \|y - Ax\|^2$$

untersuchen. Zeigen Sie:

a) $\text{grad}f(x) = -2(y - Ax)^T \cdot A$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Folgern Sie für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Äquivalenz

$$\text{grad}f(x_0) = 0 \iff A^T A x_0 = A^T y.$$

b) Bestimmen Sie die Hessematrix $Hf(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in x für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Liefert Ihnen Satz 19.17, dass $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Minimum ist, falls $\text{grad}f(x_0) = 0$ ist?