

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 45 (Übung)

Es seien

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2^2 = 6\} \quad \text{und} \quad B = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 5\}.$$

Zeigen Sie, dass $a \in A$ und $b \in B$ existieren mit

$$\|a - b\| = d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|.$$

Berechnen Sie den Wert von $d(A, B)$ mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange.

Aufgabe 46 (Tutorium)

Es seien $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (x + y + z)^2$$

und der Ellipsoid

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$$

gegeben. Bestimmen Sie $\max f(C)$ und $\min f(C)$.

Aufgabe 47 (Übung)

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Minima und Maxima der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 4x^2 - 3xy$$

auf der Menge

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Aufgabe 48 (Tutorium)

Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = 5x + y - 3z$$

auf der Menge

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Aufgabe 49 (Übung)

- a) (i) Berechnen Sie $\int_{\gamma} v(x, y) \cdot d(x, y)$ für

$$\gamma: [-1, 1] \rightarrow D, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} \text{ und } v: D \rightarrow \mathbb{R}^2, v(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2} \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 2y \end{pmatrix}, \text{ wobei} \\ D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq |y|\}.$$

- (ii) Berechnen Sie $\int_{\gamma} v(x, y, z) \cdot d(x, y, z)$ für

$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ e^{-t^2} \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix} \text{ und } v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, v(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 + 2xz \\ z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \end{pmatrix}.$$

- b) In diesem Aufgabenteil wollen wir die Implikation (2) $\Rightarrow$ (1) des Satzes 19.24 beweisen: Seien $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein nichtleeres Gebiet, $v \in C(D, \mathbb{R}^n)$ ein stetiges Vektorfeld und $\int v(x) \cdot dx$ wegunabhängig. Zeigen Sie: Das Vektorfeld v besitzt auf $\mathbb{R}^n$ eine Stammfunktion.

Hinweis: Fixieren Sie ein $x_0 \in D$ und definieren Sie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z) := \int_{\gamma_z} v(x) \cdot dx$, wobei $\gamma_z: [a, b] \rightarrow D$ eine beliebige stückweise stetig differenzierbare Kurve in D ist mit $\gamma_z(a) = x_0$ und $\gamma_z(b) = z$ und zeigen Sie $\partial_j f = v_j$ für $j \in \{1, \dots, n\}$.

Aufgabe 50 (Tutorium)

- a) (i) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(x, y) ds$ für

$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definiert durch } \gamma(t) := \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix} \text{ für ein } r > 0 \text{ und } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ f(x, y) := y.$$

- (ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(x, y, z) ds$ für

$$\gamma: [0, \log(5)] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ definiert durch } \gamma(t) := \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ und } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) := x.$$

- b) Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktion v auf ihrem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $v(x, y) = \begin{pmatrix} e^y + \cos(x) \cos(y) \\ xe^y - \sin(x) \sin(y) \end{pmatrix},$

(ii) $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $v(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 + 2xyz^3 \\ 2y + x^2z^3 \\ y^2 + 3x^2yz^2 \end{pmatrix}.$