Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Yonas Mesfun

SS 2020
11.06.2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 45 (Übung)

Es seien

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + 2x_2^2 = 6\} \quad \text{und} \quad B = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \colon y_1 + y_2 = 5\}.$$

Zeigen Sie, dass $a \in A$ und $b \in B$ existieren mit

$$\|a - b\| = d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|.$$

Berechnen Sie den Wert von $d(A, B)$ mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange.

Lösungsvorschlag:

Die Menge A beschreibt eine Ellipse und die Menge B eine Gerade. Wir müssen $a \in A$ und $b \in B$ finden, sodass

$$\|a - b\| = d(A, B). \tag{1}$$

Wenn $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Untervektorraum (also eine Gerade durch den Ursprung wäre), könnten wir den Projektionssatz (Satz 15.8) gewinnbringend anwenden:

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\| = \inf_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\| = \inf_{x \in A} \|x - P_B(x)\|$$

wobei $P_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die orthogonale Projektion auf B bezeichnet. Dann müssten wir nur noch die Funktion $x \mapsto \|x - P_B(x)\|$ auf die Existenz eines globalen Minimums in A untersuchen. Allerdings ist B kein Untervektorraum, sondern ein um den Vektor $(0, 5) \in \mathbb{R}^2$ „verschobener“ Untervektorraum (genauer: affiner Raum). Allerdings können wir dieses Problem umschiffen, da der euklidische Abstand verschiebungsinvariant ist: Sei für $v \in \mathbb{R}^2$

$$T_v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_v(x) = x + v.$$

die Verschiebung um den Vektor v. Dann gilt

$$\|T_v x - T_v y\| = \|(x + v) - (y + v)\| = \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Daher ist $d(A, B) = d(T_v(A), T_v(B))$ und für $a \in A, b \in B$ gilt

$$\|a - b\| = d(A, B) \iff \|T_v(a) - T_v(b)\| = d(T_v(A), T_v(B)).$$

Da T_v bijektiv ist (mit $T_v^{-1} = T_{-v}$), reicht es daher, $a_v \in T_v(A)$ und $b_v \in T_v(B)$ zu finden (dann erfüllen $a := T_{-v}(a_v) = a_v - v$ und $b := T_{-v}(b_v) = b_v - v$ Gleichung (1)). Wir setzen im Folgenden $v := (0, -5) \in \mathbb{R}^2$ und $A_v := T_v(A), B_v := T_v(B)$. Wie man sich leicht klar macht, gilt dann

$$\begin{aligned} A_v &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + 2(x_2+5)^2 = 6\}, \\ B_v &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \colon y_1 + y_2 = 0\} = \operatorname{lin}\{u\} \text{ mit } u := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist B_v ein Untervektorraum und nach dem Projektionssatz gilt

$$\min_{y \in B_v} \|x - y\|^2 = \|x - (x|u)u\|^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

Wir definieren daher

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x - (x|u)u\|^2.$$

Dann gilt

$$d(A_v, B_v)^2 = \inf_{x \in A_v, y \in B_v} \|x - y\|^2 = \inf_{x \in A_v} \inf_{y \in B_v} \|x - y\|^2 = \inf_{x \in A_v} f(x).$$

Um $d(A_v, B_v)$ zu bestimmen, müssen wir also das Infimum von f auf der Ellipse A_v bestimmen. Hierzu definieren wir zunächst

$$h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(x_1, x_2) = x_1^2 + 2(x_2+5)^2 - 6.$$

Dann ist $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $A_v = h^{-1}(\{0\})$ als stetiges Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ abgeschlossen. Ferner ist A_v beschränkt: Denn für alle $x = (x_1, x_2) \in A$ gilt

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2} = \sqrt{6},$$

also ist A beschränkt. Ist $x \in A_v$, so ist per Definition $x - v \in A$, also

$$\|x\| = \|(x+v) - v\| \le \|x + v\| + \|v\| \le \sqrt{6} + 5.$$

Damit ist auch A_v beschränkt. Nach Satz 19.18 ist A_v als abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt, und da f stetig ist, nimmt wiederum nach Satz 19.18 die Funktion f in A_v ein Minimum an. Dieses muss $d(A_v, B_v)^2$ sein. Wir wollen die Stelle dieses Minimums mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange ausfindig machen. Dazu stellen wir fest, dass

$$h'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4(x_2+5) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

und damit

$$h'(x_1, x_2) \ne \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{falls } (x_1, x_2) \ne (0, -5) = v \notin A_v.$$

Also ist

$$\operatorname{rg}(h'(x_1, x_2)) = 1 \quad \text{für alle } (x_1, x_2) \in A_v.$$

Wir definieren nun

$$L \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2).$$

Hat f in $(x_1, x_2) \in A_v$ das (bereits als existent erkannte) globale Minimum in A_v, so existiert nach der Multiplikatorenregel von Lagrange ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} L(x_1, x_2, \lambda) = 0. \tag{2}$$

Wie man schnell nachrechnet, gilt

$$x - (x|u)u = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \text{für alle } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

und daher

$$f(x) = \|x - (x|u)u\|^2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 \left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|^2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Daher bedeutet (2) ausgeschrieben

$$\begin{array}{rlcr} \text{(I)} & L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 0 & \Leftrightarrow & (x_1 + x_2) + 2\lambda x_1 = 0 \\ \text{(II)} & L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 0 & \Leftrightarrow & (x_1 + x_2) + \lambda(4x_2 + 20) = 0 \\ \text{(III)} & L_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) = 0 & \Leftrightarrow & x_1^2 + 2(x_2 + 5)^2 - 6 = 0. \end{array} \tag{$*$}$$

Substrahieren wir (II) von (I), erhalten wir

$$\lambda \cdot [2x_1 - (4x_2 + 20)] = 0.$$

Nun muss $\lambda \neq 0$, denn anderenfalls wäre nach (I), $x_1 = -x_2$, sodass aus (III)

$$\begin{aligned} & x_1^2 + 2(-x_1 + 5)^2 - 6 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & 3x_1^2 - 20x_1 + 44 = 0 \end{aligned}$$

folgen würde. Obige quadratische Gleichung hat allerdings keine reelle Lösung. Also muss $\lambda \neq 0$ sein. Dies impliziert aber

$$2x_1 - (4x_2 + 20) = 0, \text{ also } x_1 = 2x_2 + 10.$$

Substituieren wir $x_1 = 2x_2 + 10$ in (III), erhalten wir

$$\begin{aligned} & (2x_2 + 10)^2 + 2(x_2 + 5)^2 = 6 \\ \Longleftrightarrow\ & 4x_2^2 + 40x_2 + 100 + 2x_2^2 + 20x_2 + 50 = 6 \\ \Longleftrightarrow\ & x_2^2 + 10x_2 + 24 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & x_2 \in \{-4, -6\}. \end{aligned}$$

Wegen $x_1 = 2x_2 + 10$ erhalten wir daher

$$(2, -4), (-2, -6) \in \mathbb{R}^2$$

als mögliche Stellen für das globale Minimum von f in A_v. Da nach (3)

$$f(2, -4) = 2 \text{ und } f(-2, -6) = 16$$

gilt, sehen wir, dass das Minimum von f in $a_v := (2, -4) \in A_v$ liegt. Somit ist

$$d(A_v, B_v)^2 = \min_{x \in A_v} f(x) = f(a_v) = 2,$$

also $d(A_v, B_v) = \sqrt{2}$. Definieren wir $b_v := (a_v|u)u = (3, -3) \in B_v$, so folgt durch Einsetzen, dass $f(a_v) = \|a_v - b_v\|^2$ ist, und damit

$$d(A_v, B_v) = \|a_v - b_v\|.$$

Schließlich folgt aus den Bemerkungen zu Beginn, dass dann für $a := T_{-v}(a_v) = a_v - v = (2, 1) \in A$, $b := T_{-v}(b_v) = b_v - v = (3, 2) \in B$

$$\|a - b\| = d(A, B) = d(A_v, B_v) = \sqrt{2}$$

gilt. Damit haben wir (1) gezeigt.
Hinweis: Wie immer gilt, dass viele Wege nach Rom führen: Man kann die Aufgabe auch z.B. so lösen, indem man zeigt, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x, y) = \|x - y\|^2$ auf der Menge $A \times B$ ein globales Minimum annimmt und dieses mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange bestimmt.

Aufgabe 46 (Tutorium)

Es seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (x + y + z)^2$$

und der Ellipsoid

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$$

gegeben. Bestimmen Sie $\max f(C)$ und $\min f(C)$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen zunächst, dass $\max f(C)$ und $\min f(C)$ existieren. Hierzu beobachten wir, dass C kompakt ist: In der Tat, definieren wir die stetige Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ h(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 1,$$

so ist $C = h^{-1}(\{0\})$ und daher nach Aufgabe 27 b) als stetiges Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ abgeschlossen. Ferner ist C beschränkt, da

$$\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \quad \text{für alle } (x, y, z) \in C$$

gilt. Nach Satz 19.18 ist somit C als abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt. Da f stetig ist, folgt wiederum aus Satz 19.18, dass $\max f(C)$ und $\min f(C)$ existieren.
Wir wollen nun $\max f(C)$ und $\min f(C)$ bestimmen, indem wir mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange die möglichen Stellen lokaler Minima und Maxima von f unter der Nebenbedingung $h = 0$ ausfindig machen. Dazu stellen wir zunächst fest, dass $h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit Ableitung

$$h'(x, y, z) = (2x, 2y, 4z) \quad \text{für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

und daher

$$\operatorname{rg}(h'(x,y,z)) = 1 \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \supseteq C.$$

Wir definieren nun

$$L\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ L(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) + \lambda h(x,y,z).$$

Hat f in $(x,y,z) \in C$ ein lokales Minimum oder Maximum unter der Nebenbedingung $h = 0$, so folgt aus der Multiplikatorenregel von Lagrange, dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\operatorname{grad} L(x,y,z,\lambda) = 0.$$

Ausgeschrieben bedeutet dies

$$\begin{array}{rlcr} \text{(I)} & L_x(x,y,z,\lambda) = 0 & \Leftrightarrow & 2(x+y+z) + 2\lambda x = 0 \\ \text{(II)} & L_y(x,y,z,\lambda) = 0 & \Leftrightarrow & 2(x+y+z) + 2\lambda y = 0 \\ \text{(III)} & L_z(x,y,z,\lambda) = 0 & \Leftrightarrow & 2(x+y+z) + 4\lambda z = 0 \\ \text{(IV)} & L_\lambda(x,y,z,\lambda) = 0 & \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0. \end{array} \tag{$*$}$$

Um obiges Gleichungssystem zu lösen, unterscheiden wir die Fälle $\lambda \neq 0$ und $\lambda = 0$.

- $\lambda \neq 0$:
  Aus Gleichungen (I)$-$(III) folgt

  $$2\lambda x = 2\lambda y = 4\lambda z.$$

  und damit (wegen $\lambda \neq 0$)

  $$x = y = 2z. \tag{4}$$

  Setzen wir dies in (IV) ein, so folgt

  $$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = (2z)^2 + (2z)^2 + 2z^2 - 1 = 10z^2 - 1 \\ \Rightarrow z &= \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

  und damit aus (4) weiter

  $$x = y = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}.$$

  Durch Einsetzen in (I) erhalten wir $\lambda = -\frac{5}{2}$. Weiterhin sieht man durch Einsetzen, dass die gefundenen Werte für (x,y,z,λ) tatsächlich Lösungen von $(*)$ sind, sodass die Lösungsmenge von $(*)$ durch

  $$\left\{ \left(\left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right), -\frac{5}{2} \right), \left(-\left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right), -\frac{5}{2} \right) \right\}$$

  gegeben ist.

- $\lambda = 0:$
  In diesem Fall vereinfacht sich das Gleichungssystem $(*)$ zu

$$\begin{array}{ll} \text{(I')} & x + y + z = 0, \\ \text{(II')} & x^2 + y^2 + 2z^2 = 1. \end{array} \tag{$**$}$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist nichtleer, da z.B. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ eine Lösung ist. Tatsächlich kann man aber die Lösungsmenge explizit bestimmen, wir hier kurz skizzieren wollen (aber nicht notwendig für die Lösung der Aufgabe ist): Gleichung (I') liefert $z = -x - y$ und durch Einsetzen dieser Identität in (II') erhalten wir

$$1 = x^2 + y^2 + 2(-x-y)^2 = 3x^2 + 3y^2 + 4xy = q_A(x,y), \tag{5}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Durch Hauptachsentransformation (vgl. Aufgabe 26 b)) kann man die Lösungsmenge von (5) bestimmen: Es ist nämlich

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon q_A(x,y) = 1\} = S(E_{a,b})$$

mit orthogonaler Matrix

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und Ellipse

$$E_{a,b} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon t \in [0, 2\pi) \right\}$$

mit Parametern $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $b = 1$. Damit ist

$$SE_{a,b} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a\cos(t) - b\sin(t) \\ a\cos(t) + b\sin(t) \end{pmatrix} : t \in [0, 2\pi) \right\}$$

und daher die Lösungsmenge des Gleichungssystems $(**)$ durch

$$M_0 := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a\cos(t) - b\sin(t) \\ a\cos(t) + b\sin(t) \\ -2a\cos(t) \end{pmatrix} : t \in [0, 2\pi) \right\}$$

gegeben. Im Fall $\lambda = 0$ ist also

$$\{((x,y,z), 0) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) \in M_0\}$$

die Lösungsmenge von $(*)$.

Nach der Multiplikatorenregel von Lagrange liegen nun alle Stellen lokaler Minima und Maxima von f unter der Nebenbedingung $h = 0$ (also insbesondere auch die Stellen $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) \in C$ mit $f(x_0, y_0, z_0) = \max f(C)$ und $f(x_1, y_1, z_1) = \min f(C)$) in der Vereinigung

$$\left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right), -\left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \right\} \cup M_0.$$

Da f nach Definition nichtnegativ ist und $f(x, y, z) = 0$ für alle $(x, y, z) \in M_0$ gilt (dies folgt aus $x + y + z = 0$ für alle $(x, y, z) \in M_0$), hat f in jedem Punkt $(x, y, z) \in M_0$ ein globales Minimum und es gilt $\min f(C) = 0$. Die Stelle des globalen Maximums muss damit in $\left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right), -\left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \right\}$ liegen. Da aber $f\left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = f\left(\frac{-2}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}} \right)$ gilt, folgt, dass $\max f(C) = f(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}) = \frac{5}{2}$ ist.

Aufgabe 47 (Übung)

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Minima und Maxima der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 4x^2 - 3xy$$

auf der Menge

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Lösungsvorschlag:

Wir zerlegen

$$D = U_1(0) \,\dot\cup\, N,$$

wobei $U_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$ und $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$, und bestimmen alle Stellen lokaler Minima und Maxima von f in $U_1(0)$ bzw. in D mit Hilfe von Satz 19.17 bzw. mit Satz 19.19.

Wir beginnen mit den lokalen Extrema von f in $U_1(0)$. Es gilt

$$f'(x, y) = (8x - 3y, -3x) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

und damit

$$f'(x, y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0).$$

Damit ist $(x_0, y_0) = (0, 0)$ der einzige stationäre Punkt von f. Weiter ist

$$Hf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$p_{Hf(0,0)}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 8 - \lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} = (8 - \lambda)(-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda - 9)(\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Damit sind $\lambda_1 = +9$ und $\lambda_2 = -1$ die Eigenwerte von $Hf(0, 0)$, sodass nach Satz 18.11 und Satz 19.17 im Punkt $(0, 0)$ kein Extremum vorliegt. Wir folgern also, dass f in $U_1(0)$ kein Extremum

hat.
Wir untersuchen nun, ob f in N lokale Extrema hat. Dazu definieren wir

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\, h(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Dann gilt offensichtlich $N = h^{-1}(\{0\})$ und damit hat f genau dann ein lokales Extremum in N, falls f ein lokales Extremum unter Nebenbedingung $h = 0$ hat. Nun ist $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit Ableitung

$$h'(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0) \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \supseteq N$$

und damit

$$\operatorname{rg}(h'(x,y)) = 1 \quad \text{für alle } (x,y) \in N.$$

Wir definieren

$$L\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y).$$

Hat nun f in $(x,y) \in N$ ein lokales Extremum unter Nebenbedingung $h = 0$, so folgt aus der Multiplikatorenregel von Lagrange, dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = 0$$

Ausgeschrieben bedeutet dies

$$\begin{array}{rrcr} \text{(I)} & L_x(x,y,\lambda) = 0 & \Leftrightarrow & 8x - 3y + 2\lambda x = 0 \\ \text{(II)} & L_y(x,y,\lambda) = 0 & \Leftrightarrow & -3x + 2\lambda y = 0 \\ \text{(III)} & L_\lambda(x,y,\lambda) = 0 & \Leftrightarrow & x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{array} \tag{$*$}$$

Wir bemerken zunächst, dass $y \neq 0$ gelten muss: Anderenfalls würde nämlich aus (II) auch $x = 0$ folgen, im Widerspruch zu (III). Aus (II) folgt nun $x = \frac{2}{3}\lambda y$. Substituieren wir $x = \frac{2}{3}\lambda y$ in (I), so folgt weiter

$$\begin{aligned} 0 &= 8\left(\frac{2}{3}\lambda y\right) - 3y + 2\lambda\left(\frac{2}{3}\lambda y\right) = \left(\frac{16}{3}\lambda - 3 + \frac{4}{3}\lambda^2\right) y \\ &\overset{y\neq 0}{\Longrightarrow} \lambda^2 + 4\lambda - \frac{9}{4} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda \in \left\{-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Substituieren wir andererseits $x = \frac{2}{3}\lambda y$ in (III), so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{3}\lambda y\right)^2 + y^2 = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & y = \pm\left(1 + \frac{4}{9}\lambda^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ist $\lambda = -\frac{9}{2}$, so ist $y = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ und $x = \mp\frac{3}{\sqrt{10}}$. Ist dagegen $\lambda = \frac{1}{2}$, so ist $y = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$ und $x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$. Also könnnen die lokalen Extrema von f in N nur in

$$M := \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3), \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-3)\right\}$$

liegen. Da f stetig ist und D kompakt, muss f auf D ein globales Minimum und Maximum annehmen. Da f in $U_1(0)$ keine lokalen Extrema annimmt, müssen die Stellen der globalen Minima und Maxima von f in N und damit nach Lagrange in $M \subseteq N$ liegen. Da

$$f\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = f\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{9}{2} \quad \text{und}$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = f\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{1}{2},$$

ergibt sich:

Stellen lokaler Minima von f: $\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3), \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-3)$

Stellen lokaler Maxima von f: $\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)$.

Diese lokalen Extrema sind sogar global.

Aufgabe 48 (Tutorium)

Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = 5x + y - 3z$$

auf der Menge

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x+y+z = 0 \text{ und } x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

Lösungsvorschlag:

Sei

$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ h(x,y) = \begin{pmatrix} h_1(x,y,z) \\ h_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Offensichtlich ist $E = h^{-1}(\{0\})$ und damit als stetiges Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ abgeschlossen. Weiter ist E beschränkt, da

$$\|(x,y,z)\|^2 = x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \text{für alle } (x,y,z) \in E$$

gilt. Nach Satz 19.18 ist damit E als abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt, und da f stetig ist, existieren (wiederum nach Satz 19.18) $\max f(E)$ und $\min f(E)$.
Wir benutzen die Multiplikatorenregel von Lagrange, um die globalen Extrema zu bestimmen. Es ist

$$h'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

und daher

$$\operatorname{rg}(h'(x,y,z)) = 2 \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{lin}\{(1,1,1)\} \supseteq E.$$

Wir definieren

$$L\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) + \lambda_1 h_1(x,y,z) + \lambda_2 h_2(x,y,z).$$

Nimmt f in $(x,y,z) \in E$ ein lokales Extremum unter Nebenbedingung $h = 0$ an, so gibt es nach der Multiplikatorenregel von Lagrange ein $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, sodass

$$\text{grad } L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 0.$$

Ausgeschrieben bedeutet dies

$$\begin{array}{rrcr} \text{(I)} & L_x(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 0 & \Leftrightarrow & 5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0 \\ \text{(II)} & L_y(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 0 & \Leftrightarrow & 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0 \\ \text{(III)} & L_z(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 0 & \Leftrightarrow & -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0 \\ \text{(IV)} & L_{\lambda_1}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 0 & \Leftrightarrow & x + y + z = 0 \\ \text{(V)} & L_{\lambda_2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 0 & \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{array} \qquad (*)$$

Addieren wir (I), (II) und (III), so erhalten wir unter Ausnutzung von (IV)

$$3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \underbrace{(x + y + z)}_{=0 \text{ nach (IV)}} = 3 + 3\lambda_1 = 0$$

$$\implies \lambda_1 = -1.$$

Somit folgt aus (II), dass $2\lambda_2 y = 0$ ist, d.h., $\lambda_2 = 0$ oder $y = 0$. Wäre $\lambda_2 = 0$, so könnten (I) und (III) nicht erfüllt sein. Deshalb muss $y = 0$ sein. Nach (IV) muss daher $x = -z$ sein, sodass wegen (V)

$$(x,y,z) \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \right\}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir $\lambda_2 = \mp 2\sqrt{2}$. Damit muss

$$(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \in \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, -1, -2\sqrt{2} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1, 2\sqrt{2} \right) \right\}.$$

Aus der Multiplikatorenregel von Lagrange folgt, dass die globalen Extrema von f in

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \right\}$$

liegen müssen. Da

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = 4\sqrt{2}, \quad f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -4\sqrt{2},$$

nimmt f in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ bzw. in $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ das globale Maximum bzw. das globale Minimum an.

Aufgabe 49 (Übung)

a) (i) Berechnen Sie $\int_\gamma v(x,y) \cdot d(x,y)$ für
$\gamma\colon [-1,1] \to D$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$ und $v\colon D \to \mathbb{R}^2$, $v(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2} \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 2y \end{pmatrix}$, wobei
$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \neq |y|\}$.

(ii) Berechnen Sie $\int_\gamma v(x,y,z)\cdot d(x,y,z)$ für

$$\gamma\colon [0,\pi]\to\mathbb{R}^2,\ \gamma(t)=\begin{pmatrix}\sin(t)\\ e^{-t^2}\\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\end{pmatrix}\ \text{ und } v\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ v(x,y,z)=\begin{pmatrix}y^2+2xz\\ z^2+2xy\\ x^2+2yz\end{pmatrix}.$$

b) In diesem Aufgabenteil wollen wir die Implikation (2) $\Rightarrow$ (1) des Satzes 19.24 beweisen: Seien $n\in\mathbb{N}$, $D\subseteq\mathbb{R}^n$ ein nichtleeres Gebiet, $v\in C(D,\mathbb{R}^n)$ ein stetiges Vektorfeld und $\int v(x)\cdot dx$ wegunabhängig. Zeigen Sie: Das Vektorfeld v besitzt auf D eine Stammfunktion.
Hinweis: Fixieren Sie ein $x_0\in D$ und definieren Sie $f\colon D\to\mathbb{R}$, $f(z):=\int_{\gamma_z} v(x)\cdot dx$, wobei $\gamma_z\colon [a,b]\to D$ eine beliebige stückweise stetig differenzierbare Kurve in D ist mit $\gamma_z(a)=x_0$ und $\gamma_z(b)=z$ und zeigen Sie $\partial_j f=v_j$ für $j\in\{1,\dots,n\}$.

Lösungsvorschlag:

a) (i) Es ist

$$\gamma'(t)=\begin{pmatrix}\sinh(t)\\ \cosh(t)\end{pmatrix}\qquad \text{für alle } t\in[-1,1],$$

also

$$\begin{aligned}\int_\gamma v(x,y)\cdot d(x,y)&=\int_{-1}^1 v(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\\ &=\int_{-1}^1 \underbrace{\frac{1}{\cosh^2(t)-\sinh^2(t)}}_{=1}\begin{pmatrix}3\cosh^2(t)\\ 2\sinh(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sinh(t)\\ \cosh(t)\end{pmatrix}\,dt\\ &=\int_{-1}^1 3\cosh^2(t)\sinh(t)+2\sinh(t)\cosh(t)\,dt\\ &=\cosh^3(t)|_{-1}^1+\sinh^2(t)|_{-1}^1=0.\end{aligned}$$

(ii) Da die Kurve γ kompliziert aussieht, versuchen wir eine Stammfunktion von v zu bestimmen. Hat nämlich v eine Stammfunktion f auf $\mathbb{R}^3$, so folgt aus Satz 19.23, dass $\int_\gamma v(x,y,z)\cdot d(x,y,z)$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ abhängt. Genauer gilt dann

$$\int_\gamma v(x,y,z)\cdot d(x,y,z)=f(\gamma(\pi))-f(\gamma(0)).$$

Angenommen, v hat eine Stammfunktion f auf $\mathbb{R}^3$. Dann gilt grad $f=v$, d.h.,

$$\begin{pmatrix}f_x(x,y,z)\\ f_y(x,y,z)\\ f_z(x,y,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y^2+2xz\\ z^2+2xy\\ x^2+2yz\end{pmatrix}\qquad\text{für alle } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ folgt dann aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x f_x(t,y,z)\,dt = \int_0^x y^2 + 2tz\,dt = xy^2 + x^2z - f(0,y,z) \\ f(x,y,z) &= \int_0^y f_y(x,t,z)\,dt = \int_0^y z^2 + 2xt\,dt = yz^2 + xy^2 - f(x,0,z) \\ f(x,y,z) &= \int_0^z f_z(x,y,t)\,dt = \int_0^z x^2 + 2yz\,dt = x^2z + yz^2 - f(x,y,0). \end{aligned} \tag{6}$$

Gleichsetzen der obigen Gleichungen und Umformen liefert

$$xy^2 + f(x,y,0) = x^2z + f(x,0,z) = yz^2 + f(y,z) \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Hieraus folgt, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existieren muss mit

$$xy^2 + f(x,y,0) = x^2z + f(x,0,z) = yz^2 + f(0,y,z) = c \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

(denn die rechte Seite $yz^2 + f(0,y,z)$ ist unabhängig von x und die linke Seite der Gleichung $xy^2 + f(x,y,0)$ ist unabhängig von z, sodass auch der Term $x^2z + f(x,0,z)$ in der Mitte unabhängig von x und z, also konstant sein muss). Daher ist

$$f(x,y,0) = c - xy^2, \quad f(x,0,z) = c - x^2z, \quad f(0,y,z) = c - yz^2 \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Substituieren wir z.B. $f(x,y,0) = c - xy^2$ in der ersten Gleichung von (6), erhalten wir

$$f(x,y,z) = xy^2 + x^2z - f(0,y,z) = xy^2 + x^2z + yz^2 - c \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \tag{7}$$

Nach unseren bisherigen Überlegungen gilt also: Falls v eine Stammfunktion f hat, ist sie zwingend so definiert wie in (7). Eine kurze Rechnung zeigt aber, dass f so definiert wie in (7) mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von v ist. Daher können wir $c = 0$ in (7) annehmen, und da $\gamma(0) = (0,1,1)$ und $\gamma(\pi) = (0, e^{-\pi^2}, (1+\pi^2)^{-\frac{1}{2}})$ gilt, folgt schließlich

$$\begin{aligned} \int_\gamma v(x,y,z) \cdot d(x,y,z) =& f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) \\ =& \frac{e^{-\pi^2}}{1+\pi^2} - 1. \end{aligned}$$

b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein nichtleeres Gebiet und $v \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein stetiges Vektorfeld und $\int v(x) \cdot ds$ wegunabhängig. Wir müssen zeigen, dass v eine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^n$ besitzt. Da D nichtleer ist, existiert ein $x_0 \in D$. Wir fixieren dieses x_0 und definieren

$$f \colon D \to \mathbb{R},\ f(z) := \int_{\gamma_z} v(x) \cdot dx,$$

wobei $\gamma_z \colon [a,b] \to D$ eine beliebige stückweise stetig differenzierbare Kurve in D mit $\gamma_z(a) = x_0$ und $\gamma_z(b) = z$ ist (solch eine Kurve existiert, da D ein Gebiet ist: Denn nach Definition eines Gebietes existieren zu x_0 und z Punkte $a_0, \ldots, a_m \in D$, $m \in \mathbb{N}$, mit $a_0 = x_0$, $a_m = z$ und $\bigcup_{j=1}^m S[a_{j-1}, a_j] \subseteq D$ (zur Erinnerung: $S[a_{j-1}, a_j] := \{a_{j-1} + t(a_j - a_{j-1}) \colon t \in [0,1]\}$ ist die Verbindungsstrecke von a_{j-1} und a_j). Definieren wir für $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$\gamma_j \colon [j-1, j] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma_j(t) = a_{j-1} + t(a_j - a_{j-1}),$$

so hat $\gamma_z := \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$ die gewünschten Eigenschaften.). Da $\int v(x) \cdot dx$ wegunabhängig ist, hängt $f(z)$ für $z \in D$ nicht von der Wahl von γ_z ab. Damit ist f wohldefiniert.
Sei nun $z \in D$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $\gamma_z \colon [a, b] \to D$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma_z(a) = x_0$ und $\gamma_z(b) = z$. Da D offen ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z) \subseteq D$. Für $t \in (-\delta, \delta)$ ist dann $z + te_j \in D$ und wir können $S[z, z + te_j]$ durch die Kurve

$$\gamma^{(t)} \colon [b, b+t] \to D, \gamma^{(t)}(s) = z + (s-b)e_j$$

parametrisieren. Dann ist für jedes $t \in (-\delta, \delta)$ die Kurve $\gamma_{z+tej} := \gamma_z + \gamma^{(t)} \colon [a, b+t] \to D$ stückweise stetig differenzierbar mit $\gamma_{z+te_j}(a) = x_0$ und $\gamma_{z+te_j}(b+t) = z + te_j$ und daher

$$f(z + te_j) = \int_{\gamma_z + \gamma^{(t)}} v(x) \cdot dx \quad \text{für alle } t \in (-\delta, \delta).$$

Es folgt für alle $t \in (-\delta, \delta)$

$$\frac{f(z+te_j) - f(x)}{t} = \frac{\int_{\gamma_z + \gamma_t} v \cdot ds - \int_{\gamma_z} v \cdot ds}{t} = \frac{1}{t} \int_{\gamma^{(t)}} v(x) \cdot dx = \frac{1}{t} \int_0^t v_j(z + se_j)\, dx,$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass der Integrand $v(\gamma_t(s)) \cdot \gamma'(s) = v(z + (s-b)e_j) \cdot e_j = v_j(z + (s-b)e_j)$ für alle $s \in [b, b+t]$ ist und die Substitution $s \mapsto s - b$ durchgeführt haben. Der letzte Ausdruck der obigen Gleichungskette konvergiert gegen $v_j(z)$ für $t \to 0$. In der Tat, definieren wir $\varphi \colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $\varphi(s) := v_j(z + se_j)$, so ist φ stetig, da nach Voraussetzung v und damit auch v_j stetig ist. Definieren wir weiter $\Phi \colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds$, so folgt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(z+te_j) - f(x)}{t} = \lim_{to\ 0} \frac{1}{t} \int_0^t v \cdot ds = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t} = \Phi'(0) = \varphi(0) = v_j(z).$$

Also existiert $\partial_j f(z)$ und es gilt $\partial_j f(x) = v_j(x)$. Da $z \in D$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig gewählt waren, folgt

$$\partial_j f = v_j \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Also ist f eine Stammfunktion von v und der Beweis ist abgeschlossen.

Aufgabe 50 (Tutorium)

a) (i) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x,y)\, ds$ für $\gamma \colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$ für ein $r > 0$ und $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := y$.

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x,y,z)\, ds$ für $\gamma \colon [0, \log(5)] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := x$.

b) Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktion v auf ihrem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $v(x,y) = \begin{pmatrix} e^y + \cos(x)\cos(y) \\ xe^y - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$,

(ii) $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 + 2xyz^3 \\ 2y + x^2z^3 \\ y^2 + 3x^2yz^2 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag:

a) (i) Für alle $t \in [0,\pi]$ ist

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix}$$

und daher $\|\gamma'(t)\| = r$. Es folgt

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_0^\pi f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^\pi r^2\sin(t)\,dt = -r^2\cos(t)|_0^\pi = 2r^2.$$

(ii) Nach der Produktregel ist

$$\gamma'(t) = \frac{e^t}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{=:v_1(t)} + \frac{e^t}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:v_2(t)} = \frac{e^t}{2}(v_1(t + v_2(t)) \quad \text{für alle } t \in [0,\log(5)].$$

Da $v_1(t) \perp v_2(t)$ für alle $t \in [0,\log(5)]$, folgt

$$\|\gamma'(t)\| = \frac{e^t}{2}\left(\|v_1(t)\|^2 + \|v_2(t)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = e^t \quad \text{für alle } t \in [0,\log(5)].$$

Es folgt

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds = \int_0^{\log(5)} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\log(5)} e^{2t}\cos(t)\,dt.$$

Durch zweimalige partielle Integration folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{\log(5)} e^{2t}\cos(t)\,dt &= e^{2t}\sin(t)|_0^{\log(5)} - 2\int_0^{\log(5)} e^{2t}\sin(t)\,dt \\ &= 25\sin(\log(5)) + 2e^{2t}\cos(t)|_0^{\log(5)} - 4\int_0^{\log(5)} e^{2t}\cos(t)\,dt \\ &= 25\sin(\log(5)) + 50\cos(\log(5)) - 2 - 4\int_0^{\log(5)} e^{2t}\cos(t)\,dt\end{aligned}$$

und daher

$$\int_0^{\log(5)} e^{2t}\cos(t)\,dt = \frac{1}{5}\left(25\sin(\log(5)) + 50\cos(\log(5)) - 2\right).$$

Somit ist

$$\int_\gamma f(x,y,z)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{\log(5)} e^{2t}\cos(t)\,dt = \frac{5}{2}\sin(\log(5)) + 5\cos(\log(5)) - \frac{1}{5}.$$

b) Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktion v auf ihrem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) Mit etwas Geschick kann man eine Stammfunktion von v erraten. Wir wollen allerdings anders vorgehen und einen Ansatz verfolgen, der auch in anderen ähnlichen Situationen oft zum Ziel führt: Da

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, besitzt v nach Satz 19.25 eine Stammfunktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Indem wir bei Bedarf f durch $f - f(0,0)$ ersetzen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f(0,0) = 0$ gilt. Ist nun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so folgt nach Satz 19.23

$$f(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = \int_\gamma v \cdot ds,$$

wobei

$$\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{R}, \gamma(t) := \begin{cases} (tx, 0) & t \in [0,1], \\ (x, (t-1)y) & t \in (1,2]. \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_\gamma v \cdot ds \\ &= \int_0^1 v_1(tx,0) \cdot x \, dt + \int_1^2 v_2(x,(t-1)y) \cdot y \, dt \\ &= \int_0^1 x + x\cos(tx) \, dt + \int_0^1 xye^{ty} - y\sin(x)\sin(ty) \, dt \\ &= [tx + \sin(tx)] \,|_0^1 + \left[xe^{ty} + \sin(x)\cos(ty)\right] |_0^1 \\ &= x + \sin(x) + xe^y + \sin(x)\cos(y) - x - \sin(x) \\ &= xe^y + \sin(x)\cos(y). \end{aligned}$$

Da $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig gewählt war, ist also

$$f(x,y) = xe^y + \sin(x)\sin(y) \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Nach Satz 19.21 kann v keine Stammfunktion haben. Es ist nämlich

$$J_v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2yz^3 & 2y + 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 2xz^3 & 2 & 3x^2z^2 \\ 6xyz^2 & 2y + 3x^2z^2 & 6x^2yz \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Somit ist $J_v(x,y,z)$ nicht symmetrisch, was äquivalent dazu ist, dass v die Integrabilitätsbedingung $\partial_j v_k = \partial_k v_j$ für alle $j,k \in \{1,\ldots,n\}$ verletzt. Nach Satz 19.21 kann daher v keine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^3$ haben.