

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 51 (Übung)

Es sei $I = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ und

$$f(x, y) = xe^{-y} \quad \text{für } (x, y) \in I.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bestimmen die Eckpunkte der Teilintervalle

$$I_{jk}^{(n)} := \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right] \times \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \quad j, k = 1, \dots, n$$

eine Zerlegung Z_n des Intervalls I .

Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(Z_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} s_f(Z_n)$. Berechnen Sie weiterhin $\int_I f(x, y) \, d(x, y)$, falls dieses existiert.

Aufgabe 52 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a) $\int_A (2x + 3y) \, d(x, y)$, $A = [0, 2] \times [3, 4]$,
- b) $\int_B \frac{2z}{(x+y)^2} \, d(x, y, z)$, $B = [1, 2] \times [2, 3] \times [0, 2]$,
- c) $\int_C \frac{2y}{x+y^2} \, d(x, y)$, $C = [1, 2] \times [1, 2]$.

Aufgabe 53 (Übung)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a) $\int_A xy + y^2 \, d(x, y)$, $A = [0, 1] \times [0, 1]$,
- b) $\int_B \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \, d(x, y)$, $B = [0, 1] \times [0, 1]$,
- c) $\int_C \cosh(2x + y) \, d(x, y)$, $C = [-1, 0] \times [0, 2]$.

Aufgabe 54 (Tutorium)

Berechnen Sie das Volumen folgender messbarer Mengen mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri.

- a) $M_1 := \left\{ (x, y, z) \in [-r, r]^2 \times [0, h] : x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{h^2} z^2 \right\}$ für $r, h > 0$,

- b) $M_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 2, y \in [0, 3], 0 \leq z \leq 4 - x^2\},$
 c) $M_3 := \{v \in \mathbb{R}^4 : \|v\| \leq 1\}.$

Aufgabe 55 (Übung)

- a) Für eine messbare Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $|M| > 0$ definieren wir ihren Schwerpunkt $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ durch

$$s_i := \frac{1}{|M|} \int_M x_i \, d(x_1, x_2, x_3) \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Kegels $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq z^2\}.$

- b) Berechnen Sie für $0 < r < R$ das Volumen des Torus

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [-r, r], \left(R - \sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 < x^2 + y^2 \leq \left(R + \sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 \right\}.$$

Hinweis: Fassen Sie T als Differenz zweier Rotationskörper auf.

Aufgabe 56 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a) $\int_A x \cos(y) \, d(x, y), A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \sqrt{\pi}], 0 \leq y \leq x^2\},$
 b) $\int_B xy^2 \, d(x, y), B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1], 1 - y^2 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\},$
 c) $\int_C z^2 \, d(x, y, z), C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x, 1 + x + y \leq z \leq e^{x+y}\}.$