Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 51 (Übung)

Es sei $I = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ und

$$f(x,y) = xe^{-y} \quad \text{für } (x,y) \in I.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bestimmen die Eckpunkte der Teilintervalle

$$I_{jk}^{(n)} := \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \times \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad j,k = 1,\ldots,n$$

eine Zerlegung Z_n des Intervalls I.
Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} S_f(Z_n)$ und $\lim_{n\to\infty} s_f(Z_n)$. Berechnen Sie weiterhin $\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$, falls dieses existiert.

Lösungsvorschlag:

Die Funktion $x \mapsto x$ ist monoton wachsend und die Funktion $y \mapsto e^{-y}$ ist monoton fallend. Hieraus ergibt sich, dass

$$m_{jk}^{(n)} := \inf_{(x,y)\in I_{jk}^{(n)}} f(x,y) = \inf_{x\in\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]} x \cdot \inf_{y\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]} e^{-y} = \frac{j-1}{n} \cdot e^{-\frac{k}{n}},$$
$$M_{jk}^{(n)} := \sup_{(x,y)\in I_{jk}^{(n)}} f(x,y) = \sup_{x\in\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]} x \cdot \sup_{y\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]} e^{-\frac{k-1}{n}} = \frac{j}{n} \cdot e^{-\frac{k-1}{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $j,k = 1,\ldots,n$. Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$s_f(Z_n) = \sum_{j,k=1}^{n} m_{jk}^{(n)} \left|I_{jk}^{(n)}\right| = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{j-1}{n} \cdot e^{-\frac{k}{n}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{j=1}^{n} j-1\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^k\right)$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{n^3} \frac{n(n-1)}{2} \cdot e^{-\frac{1}{n}} \frac{1-\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{-\frac{1}{n}}}$$

$$= \underbrace{\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2}}_{\to\frac{1}{2}} \cdot \left(1-e^{-1}\right) \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{n}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{e^{-\frac{1}{n}}-e^0}{-\frac{1}{n}-0}\right)^{-1}}_{\left(\to\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x|_{x=0}\right)^{-1}=1} \longrightarrow \frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right) \quad (n\to\infty),$$

wobei in $(*)$ die Gaußsche Summenformel für die linke Summe und die geometrische Summenformel für die rechte Summe verwendet haben. Analog gilt

$$\begin{aligned}
S_f(Z_n) = \sum_{j,k=1}^{n} M_{jk}^{(n)} \left| I_{jk}^{(n)} \right| &= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{j}{n} \cdot e^{-\frac{k-1}{n}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{j=1}^{n} j \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{-\frac{1}{n}} \right)^k \right) \\
&= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1 - \left(e^{-\frac{1}{n}} \right)^n}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} \\
&= \underbrace{\frac{(1+\frac{1}{n})}{2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \left(1 - e^{-1}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{e^{-\frac{1}{n}} - e^0}{-\frac{1}{n} - 0} \right)^{-1}}_{\left(\to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x|_{x=0}\right)^{-1} = 1} \longrightarrow \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right) \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Wir folgern

$$\lim_{n \to \infty} s_f(Z_n) = \lim_{n \to \infty} S_f(Z_n) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right). \tag{1}$$

Die Funktion f ist stetig auf I und daher nach Satz 20.2 auch integrierbar über I. Nach dem Satz von Fubini (Satz 20.3) gilt

$$\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 x e^{-y}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[x^2\right]\Big|_0^1 \cdot \left[-e^{-y}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right),$$

in Übereinstimmung mit (1).

Bemerkung: Die Gleichheit von $\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ und $\lim_{n\to\infty} s_f(Z_n)$ bzw. $\lim_{n\to\infty} S_f(Z_n)$ ist kein Zufall. Tatsächlich gilt folgender

Satz: Sind $d \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ integrierbar über I, so gilt für jede Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen von I mit $\lim_{n\to\infty} \|Z_n\| = 0$, dass

$$\lim_{n \to \infty} s_f(Z_n) = \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \lim_{n \to \infty} S_f(Z_n).$$

Hierbei bezeichnet $\|Z_n\|$ die *Maschenweite* von Z_n: Sind $I_1 = \left[a_1^{(1)}, b_1^{(1)}\right] \times \cdots \times \left[a_d^{(1)}, b_d^{(1)}\right], \ldots, I_m = \left[a_1^{(m)}, b_1^{(m)}\right] \times \cdots \times \left[a_d^{(m)}, b_d^{(m)}\right]$ die Teilintervalle von I bezüglich Z_n, so ist $\|Z_n\|$ die maximale Kantenlänge, d.h.,

$$\|Z_n\| := \max_{\substack{i=1,\ldots,d \\ j=1,\ldots m}} \left(b_i^{(j)} - a_i^{(j)} \right).$$

In obiger Aufgabe war $\|Z_n\| = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 52 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_A (2x + 3y)\,\mathrm{d}(x,y)$, $A = [0,2] \times [3,4]$,

b) $\int_B \frac{2z}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}(x,y,z)$, $B = [1,2] \times [2,3] \times [0,2]$,

c) $\int_C \frac{2y}{x+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$, $C = [1,2] \times [1,2]$.

Lösungsvorschlag:

Alle Integranden sind stetige Funktionen auf den jeweiligen Intervallen A, B und C. Deshalb können wir den Satz von Fubini (Satz 20.3) anwenden, um die Integrale auszurechnen.

a) Es ist

$$\int_A (2x+3y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_3^4 \left(\int_0^2 (2x+3y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_3^4 \left[x^2+3xy\right]\Big|_{x=0}^{x=2}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_3^4 4+6y\,\mathrm{d}y = \left[4y+3y^2\right]\Big|_3^4 = 25.$$

b) Weiter ist

$$\int_B \frac{2z}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_1^2 \left(\int_2^3 \left(\int_0^2 \frac{2z}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\int_2^3 \left[\frac{z^2}{(x+y)^2}\right]\Bigg|_{z=0}^{z=2} \mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^2 \left(\int_2^3 \frac{4}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[-\frac{4}{(x+y)}\right]\Bigg|_{y=2}^{y=3} \mathrm{d}x$$
$$=4\int_1^2 \left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)\,\mathrm{d}x = 4\left[\,\log(x+2)-\log(x+3)\,\right]\Big|_1^2$$
$$=4\left[\,\log(4)-\log(3)-\log(5)+\log(4)\,\right] = 4\log\left(\frac{16}{15}\right).$$

c) Schließlich ist

$$\int_C \frac{2y}{x+y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{2y}{x+y^2}\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[\log\left(x+y^2\right)\right]\Big|_{y=1}^{y=2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^2 \log(x+4)-\log(x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Durch partielle Integration kann man eine Stammfunktion von $x \mapsto \log(x)$ bestimmen:

$$\int \log(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\log(x)\,\mathrm{d}x = x\log(x) - \int \underbrace{x\cdot\frac{1}{x}}_{=1}\,\mathrm{d}x = x\cdot(\log(x)-1).$$

Also ist

$$\int_C \frac{2y}{x+y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_1^2 \log(x+4)-\log(x+1)\,\mathrm{d}x$$
$$= [(x+4)(\log(x+4)-1)-(x+1)(\log(x+1)-1)]\big|_1^2$$
$$= 6(\log(6)-1)-5(\log(5)-1)-(3(\log(3)-1)-2(\log(2)-1))$$
$$= 6\log(6)-5\log(5)-3\log(3)+2\log(2)$$
$$= \log\left(\frac{6^6\cdot 2^2}{5^5\cdot 3^3}\right) = \log\left(\frac{3^3\cdot 2^8}{5^5}\right).$$

Aufgabe 53 (Übung)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_A xy + y^2 \,\mathrm{d}(x,y)$, $A = [0,1] \times [0,1]$,

b) $\int_B \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}(x,y)$, $B = [0,1] \times [0,1]$,

c) $\int_C \cosh(2x+y) \,\mathrm{d}(x,y)$, $C = [-1,0] \times [0,2]$.

Lösungsvorschlag:

Alle Integranden sind stetige Funktionen auf den jeweiligen Intervallen A, B und C. Deshalb können wir den Satz von Fubini (Satz 20.3) anwenden, um die Integrale auszurechnen.

a) Es ist

$$\begin{aligned}\int_A xy + y^2 \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 xy + y^2 \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 y + xy^2 \right] \Bigg|_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}y + y^2 \,\mathrm{d}y. = \left[\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{3}y^3 \right] \Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

b) Weiter ist

$$\begin{aligned}\int_B \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[-\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \Bigg|_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(2+x^2)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\sinh^{-1}(1)} \frac{\cosh(t)}{(1+\sinh^2(t))^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}t - \int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \frac{\sqrt{2}\cosh(t)}{(2+(\sqrt{2}\sinh(t))^2)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\sinh^{-1}(1)} 1 \,\mathrm{d}t - \int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} 1 \,\mathrm{d}t \\ &= \sinh^{-1}(1) - \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

An dieser Stelle sind wir eigentlich schon fertig. Wir können aber das Ergebnis in Termen vom (natürlichen) Logarithmus angeben, da wir $\sinh^{-1}$ „explizit" berechnen können: Denn für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung $\sinh(x) = y$ genau dann, wenn

$$\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = y \iff (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \iff e^x = y \pm \sqrt{y^2+1} \overset{e^x>0}{\iff} e^x = y + \sqrt{y^2+1}.$$

Damit ist $\sinh^{-1}(y) = \log\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$, $y \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_B \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}(x,y) &= \sinh^{-1}(1) - \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \log\left(1+\sqrt{2}\right) - \log\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

c) Schließlich ist

$$\int_C \cosh(2x+y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^2 \left(\int_{-1}^0 \cosh(2x+y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}\sinh(2x+y)\right]\Big|_{x=-1}^{x=0}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^2 \frac{1}{2}\left(\sinh(y) - \sinh(-2+y)\right)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\cosh(y) - \cosh(-2+y)\right]\Big|_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cosh(2) - \cosh(0) - \cosh(0) + \cosh(-2)\right) = \cosh(2) - 1.$$

Aufgabe 54 (Tutorium)

Berechnen Sie das Volumen folgender messbarer Mengen mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri.

a) $M_1 := \left\{(x,y,z) \in [-r,r]\times[0,h] \colon x^2+y^2 \le \frac{r^2}{h^2}z^2\right\}$ für $r,h>0$,

b) $M_2 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon |x|\le 2,\ y\in[0,3],\ 0\le z\le 4-x^2\}$,

c) $M_3 := \{v\in\mathbb{R}^4 \colon \|v\|\le 1\}$.

Lösungsvorschlag:

a) Die Menge M_1 beschreibt einen (auf dem Kopf stehenden) Kegel mit Radius r und Höhe h. Für $z\in[0,h]$ ist

$$\begin{aligned} Q(z) :=& \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon (x,y,z)\in M_1\} \\ =& \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \le \frac{r^2}{h^2}z^2\right\} \end{aligned}$$

ein Kreis mit Radius $\frac{r}{h}z$ und damit messbar (dies folgt aus Satz 20.5 mit $B := [-R,R]$, $f(x) := \sqrt{R^2-x^2}$ und $g(x) := -f(x)$, wobei $R := \frac{r}{h}z$. Dann ist nämlich $Q(z) = M(f,g)$ nach Satz 20.5 messbar.). Wir folgern

$$|Q(z)| = \pi\frac{r^2}{h^2}z^2, \quad z\in[0,h].$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri ist daher

$$|M_1| = \int_0^h |Q(z)|\,\mathrm{d}z = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h z^2\,\mathrm{d}z = \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

b) Ist $(x,y,z)\in M_2$, so folgt $z\in[0,4]$ unmittelbar aus der Definition von M_2. Für $z\in[0,4]$ ist

$$\begin{aligned} Q(z) :=& \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon (x,y,z)\in M_2\} \\ =& \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon y\in[0,3],\ |x|\le\sqrt{4-z}\} \\ =& [-\sqrt{4-z},\sqrt{4-z}]\times[0,3] \end{aligned}$$

ein Intervall (und damit insbesondere messbar) mit Inhalt

$$|Q(z)| = 2\sqrt{4-z}\cdot 3 = 6\sqrt{4-z}, \quad z\in[0,4].$$

Aus dem Prinzip von Cavalieri folgt

$$|M_2| = \int_0^4 |Q(z)|\,\mathrm{d}z = 6\int_0^4 \sqrt{4-z}\,\mathrm{d}z = 6\left[-\frac{2}{3}(4-z)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = 4^{\frac{5}{2}}.$$

c) Für $v \in \mathbb{R}^4$ schreiben wir $v = (x, z)$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ und $z \in \mathbb{R}$. Ist $v = (x, z) \in M_3$, so gilt offenbar auch $|z| \leq 1$, also $z \in [-1, 1]$. Für $z \in [-1, 1]$ ist dann

$$\begin{aligned} Q(z) :=& \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (x, z) \in M_3\} \\ =& \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \|(x, z)\| \leq 1\} \\ =& \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \|x\| \leq \sqrt{1 - z^2}\}, \end{aligned}$$

also eine dreidimensionale Kugel mit Radius $\sqrt{1 - z^2}$ und damit messbar (dies kann man genauso zeigen wie die Messbarkeit eines zweidimensionalen Kreises in a)). Nach Beispiel (2), S.118, Skript, folgt

$$|Q(z)| = \frac{4}{3}\pi(1 - z^2)^{\frac{3}{2}}, \quad z \in [-1, 1].$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri ist also

$$\begin{aligned} |M_3| =& \int_{-1}^{1} |Q(z)| \, \mathrm{d}z = \frac{4}{3}\pi \int_{-1}^{1} (1 - z^2)^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}z \\ =& \frac{4}{3}\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))^{\frac{3}{2}} \cos(t) \, \mathrm{d}t = \frac{4}{3}\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t) \, \mathrm{d}t =: \frac{4}{3}\pi \cdot I_4, \end{aligned}$$

wobei

$$I_n := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \, \mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Man kann I_n mit Hilfe von partieller Integration bestimmen: Für $n \geq 2$ ist

$$\begin{aligned} I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \, \mathrm{d}t =& \sin(t) \cos^{n-1}(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + (n - 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)(\sin(t) \cos^{n-2}(t)) \, \mathrm{d}t \\ =& (n - 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^{n-2}(t) \, \mathrm{d}t \\ =& (n - 1)I_{n-2} - (n - 1) \cdot I_n. \end{aligned}$$

Umformen nach I_n ergibt die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n - 1}{n} \cdot I_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \tag{2}$$

Da $I_0 = \pi$ und $I_1 = 2$ gilt (wie man leicht ausrechnet), folgt aus (2) für $n \geq 2$

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{3}$$

Insbesondere ist

$$I_4 = \frac{3}{4} \cdot I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{3}{8}\pi.$$

Daher erhalten wir

$$M_3 = \frac{4}{3}\pi \cdot I_4 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Bemerkung: Analog kann man das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel berechnen. Aus dem Prinzip von Cavalieri erhalt man dann für das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel $B_n := \{v \in \mathbb{R}^n \colon \|v\| \leq 1\}$ die Rekursionsformel

$$|B_n| = |B_{n-1}| \cdot I_n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

und daher

$$|B_n| = \left(\prod_{j=2}^{n} I_j\right) |B_1|, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \tag{4}$$

Aus der Rekursionsformel (3) folgt nun

$$I_j \cdot I_{j+1} = \frac{1}{j+1} \cdot 2\pi \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}, j \geq 2,$$

sodass für $k \in \mathbb{N}$

$$\prod_{j=2}^{2k} I_j = \left(\prod_{j=1}^{k-1} I_{2j} \cdot I_{2j+1}\right) I_{2k} = \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{2\pi}{2j+1}\right) \cdot I_{2k} \overset{(3)}{=} \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{2\pi}{2j}\right) \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^k}{k!}$$

und

$$\prod_{j=2}^{2k+1} I_j = \prod_{j=1}^{k} I_{2j} \cdot I_{2j+1} = \prod_{j=2}^{k} \frac{2\pi}{2j+1} = \frac{2^k \pi^k}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}$$

folgen. Da $|B_1| = |[-1,1]| = 2$ ist, folgern wir schließlich aus obigen Gleichungen und (4)

$$|B_n| = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!} & \text{falls } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} & \text{falls } n = 2k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Erstaunlicherweise wächst $n \mapsto |B_n|$ zunächst, fällt dann aber wieder und es gilt $\lim_{n\to\infty} |B_n| = 0$!

Aufgabe 55 (Übung)

a) Für eine messbare Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $|M| > 0$ definieren wir ihren Schwerpunkt $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ durch

$$s_i := \frac{1}{|M|} \int_M x_i \, \mathrm{d}(x_1, x_2, x_3) \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Kegels $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in [0,1],\ x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

b) Berechnen Sie für $0 < r < R$ das Volumen des Torus

$$T := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in [-r,r],\ \left(R - \sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 < x^2 + y^2 \leq \left(R + \sqrt{r^2 - z^2}\right)^2\right\}.$$

Hinweis: Fassen Sie T als Differenz zweier Rotationskörper auf.

Lösungsvorschlag:

a) Wir schreiben im Folgenden (x, y, z) statt (x_1, x_2, x_3).
Nach Definition von M gilt $M \subseteq I := [-1,1]^2 \times [0,1]$. Weiter gilt, dass für jedes $z \in [0,1]$ der Querschnitt $Q(z) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y,z) \in M\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq z^2\}$ ein Kreis mit Radius z mit Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^2$ und damit messbar ist (vgl. Aufgabe 54 a)). Daher gilt für jede Funktion $f \in C(M, \mathbb{R})$

$$\int_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Def.}}{=} \int_I f_M(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{20.3}{=} \int_0^1 \left(\int_{[-1,1]^2} f_M(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y) \right) \mathrm{d}z$$
$$\overset{(*)}{=} \int_0^1 \left(\int_{[-1,1]^2} f_{Q(z)}(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y) \right) \mathrm{d}z \overset{\text{Def.}}{=} \int_0^1 \left(\int_{Q(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y) \right) \mathrm{d}z,$$

wobei wir in $(*)$ ausgenutzt haben, dass für festes $z \in [0,1]$ die Funktionen $(x,y) \mapsto f_M(x,y,z)$ und $(x,y) \mapsto f_{Q(z)}(x,y,z)$ identisch sind. Wir benutzen nun obige Formel um die Integrale $\int_M x\,\mathrm{d}(x,y,z)$, $\int_M y\,\mathrm{d}(x,y,z)$ und $\int_M z\,\mathrm{d}(x,y,z)$ auszurechnen.
Da für $z \in [0,1]$

$$Q(z) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [-1,1],\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$$

ein Normalbereich bzgl. der x-Achse ist, erhalten wir

$$\int_{Q(z)} x\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 2\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 0,$$

da die Funktion $x \mapsto g(x) := x\sqrt{1-x^2}$ eine ungerade Funktion ist (d.h., es gilt $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in [-1,1]$). Nach obiger Formel gilt also

$$\int_M x\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{Q(z)} x\,\mathrm{d}(x,y) \right)}_{=0} \mathrm{d}z = 0.$$

Aus Symmetriegründen können wir die Rollen von x und y in der obigen Rechnung vertauschen und erhalten dann gleichermaßen

$$\int_M y\,\mathrm{d}(x,y,z) = 0.$$

Schließlich erhalten wir

$$\int_M z\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 \left(\int_{Q(z)} z\,\mathrm{d}(x,y) \right) \mathrm{d}z = \int_0^1 |Q(z)| \cdot z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \pi z^2 \cdot z\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}[z^4]|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Nach Aufgabe 54 a) (mit $r = h = 1$) ist $|M| = \frac{\pi}{3}$. Damit sind die Koordinaten s_1, s_2 und s_3 des Schwerpunktes $s \in \mathbb{R}^3$ von M gegeben durch

$$s_1 = \frac{1}{|M|} \int_M x\,\mathrm{d}(x,y,z) = 0$$
$$s_2 = \frac{1}{|M|} \int_M y\,\mathrm{d}(x,y,z) = 0$$
$$s_3 = \frac{1}{|M|} \int_M x\,\mathrm{d}(x,y,z) = \frac{1}{\frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}.$$

b) Definieren wir

$$f\colon [-r,r] \to \mathbb{R},\ f(z) = R + \sqrt{r^2 - z^2},$$
$$g\colon [-r,r] \to \mathbb{R},\ g(z) = R - \sqrt{r^2 - z^2},$$

so gilt wegen $0 < r < R$, dass $f \geq g \geq 0$ ist. Weiterhin sind f und g nach Satz 20.2 als stetige Funktionen integrierbar über $[-r,r]$. Wir bemerken, dass $T = M_2 \backslash M_1$, wobei

$$M_1 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon z \in [-r,r],\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq (g(z))^2\right\}$$
$$M_2 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon z \in [-r,r],\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq (f(z))^2\right\}$$

zwei (messbare) Rotationskörper mit $M_1 \subseteq M_2$ sind. Da nach Satz 20.5 $|T| = |M_2| - |M_1|$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
|T| &= |M_2| - |M_1| \\
&= \pi \int_{-r}^{r} f(z)^2 \,\mathrm{d}z - \pi \int_{-r}^{r} g(z)^2 \,\mathrm{d}z \\
&= \pi \int_{-r}^{r} f(z)^2 - g(z)^2 \,\mathrm{d}z \\
&\overset{(*)}{=} 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - z^2} \,\mathrm{d}z \\
&\overset{(**)}{=} 4\pi R \frac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R,
\end{aligned}$$

wobei wir einerseits in $(*)$ für die Berechnung von $f(z)^2 - g(z)^2$ ausgenutzt haben, dass $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, und andererseits bemerkt haben, dass das Integral $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - z^2}\,\mathrm{d}z$ gerade der Inhalt des oberen Halbkreises $\{y,z) \in \mathbb{R}^2\colon y \geq 0,\ y^2 + z^2 \leq r^2\}$ mit Radius r ist.

Aufgabe 56 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_A x\cos(y)\,\mathrm{d}(x,y)$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x \in [0, \sqrt{\pi}\,],\ 0 \leq y \leq x^2\}$,

b) $\int_B xy^2\,\mathrm{d}(x,y)$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y \in [-1,1],\ 1 - y^2 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$,

c) $\int_C z^2\,\mathrm{d}(x,y,z)$, $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x \in [0,1],\ 0 \leq y \leq x,\ 1 + x + y \leq z \leq e^{x+y}\}$.

Lösungsvorschlag:

a) Die Menge A ist ein Normalbereich bzgl. der x-Achse: In der Tat, definieren wir

$$f\colon \left[0, \sqrt{\pi}\,\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2,$$
$$g\colon \left[0, \sqrt{\pi}\,\right] \to \mathbb{R},\ g(x) = 0,$$

so sind $f, g \in C\left([0, \sqrt{\pi}\,], \mathbb{R}\right)$, $g \leq f$ und es gilt

$$A = M(f,g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x \in \left[0, \sqrt{\pi}\,\right],\ g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

Nach S.120, Skript, ist daher

$$\begin{aligned}\int_A x\cos(y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{x^2} x\cos(y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{\pi}} x\left[\sin(y)\right]\big|_0^{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}\left(-\cos(\pi)+\cos(0)\right) = 1.\end{aligned}$$

b) Die Menge B ist ein Normalbereich bzgl. der y-Achse: In der Tat, definieren wir

$$\begin{aligned}f\colon\ [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(y) = \sqrt{1-y^2},\\ g\colon\ [-1,1] \to \mathbb{R},\ g(y) = 1-y^2,\end{aligned}$$

so sind $f, g \in C\left([0,\sqrt{\pi}\,], \mathbb{R}\right)$, $g \le f$ und es gilt

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [-1,1]\,,\ g(y) \le x \le f(y)\}.$$

Nach S. 121, Skript, ist daher

$$\begin{aligned}\int_B xy^2\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{1-y^2}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} y^2 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1-y^2}^{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^2 \cdot \left(1-y^2-(1-y^2)^2\right)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^4 - y^6\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\cdot 2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{35}.\end{aligned}$$

c) Die Menge C ist ein Normalbereich im $\mathbb{R}^3$. Wir definieren

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [0,1], 0 \le y \le x\}.$$

Dann ist D kompakt und messbar, denn:

1. D ist kompakt:
   Hierzu müssen wir uns nach Satz 19.18 klar machen, dass D abgeschlossen und beschränkt ist. Die Abgeschlossenheit folgt leicht aus dem Folgenkriterium (Satz 19.2): Ist $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ eine Folge in D, die gegen ein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert, so folgt wegen $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$, dass

   $$0 \le x_n \le 1 \quad \text{und} \quad 0 \le y_n \le x_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

   Hieraus folgt durch den Grenzübergang $n \to \infty$ (unter Verwendung von $(x_n, y_n) \to (x,y)$ $(n \to \infty)$ $\iff$ $x_n \to x$ $(n\to\infty)$ und $y_n \to y$ $(n \to \infty)$) auch

   $$0 \le x \le 1 \quad \text{und} \quad 0 \le y \le x$$

   und damit $(x,y) \in D$. Also ist D abgeschlossen. Die Beschränktheit von D kann man folgendermaßen einsehen: Ist $(x,y) \in D$, so folgt

   $$\|(x,y)\| \le |x| + |y| \le 1 + |x| \le 1 + 1 = 2.$$

   Also ist D nach Satz 19.18 kompakt.

2. D ist messbar:
   Definieren wir

$$\varphi\colon\ [0,1] \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = x,$$
$$\psi\colon\ [0,1] \to \mathbb{R},\ \psi(x) = 0,$$

   so folgt $\varphi, \psi \in C([0,1], \mathbb{R}) \subseteq R([0,1], \mathbb{R})$ und $D = M(\varphi, \psi)$. Damit ist nach Satz 20.5 die Menge D messbar.

Definieren wir

$$f\colon D \to \mathbb{R},\ f(x,y) = e^{x+y},$$
$$g\colon D \to \mathbb{R},\ g(x) = 1 + x + y,$$

so sind $f, g \in C\,(D, \mathbb{R})$. Weiter gilt $g \leq f$, denn es gilt für $u \geq 0$

$$e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = 1 + u + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{u^k}{k!}}_{\geq 0} \geq 1 + u,$$

sodass mit der Substitution $u = x + y$

$$f(x,y) = e^{1+x+y} \geq 1 + x + y = g(x,y) \quad \text{für alle } (x,y) \in D$$

folgt. Nun sehen wir, dass

$$C = M(f,g) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y) \in D,\ g(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$$

ist, sodass C ein Normalbereich im $\mathbb{R}^3$ ist. Nach S. 122, Skript, folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_C z^2 \,\mathrm{d}(x,y,z) = & \int_D \left(\int_{1+x+y}^{e^{x+y}} z^2 \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}(x,y) = \int_D \frac{1}{3} \left[z^3 \right]_{1+x+y}^{e^{x+y}} \mathrm{d}(x,y) \\
=& \frac{1}{3} \int_D e^{3(x+y)} - (1+x+y)^3 \,\mathrm{d}(x,y) \\
=& \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\int_0^x e^{3(x+y)} - (1+x+y)^3 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{3} \int_0^1 \left[\frac{1}{3} e^{3(x+y)} - \frac{1}{4}(1+x+y)^4 \right]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{3}\left(e^{6x} - e^{3x}\right) - \frac{1}{4}\left[(1+2x)^4 - (1+x)^4\right] \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{9} \left[\frac{1}{6} e^{6x} - \frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^1 - \frac{1}{12} \left[\frac{1}{10}(1+2x)^5 - \frac{1}{5}(1+x)^5 \right]_0^1 \\
=& \frac{1}{9} \left[\frac{1}{6} e^6 - \frac{1}{3} e^3 + \frac{1}{6} \right] - \frac{1}{12} \left[\frac{1}{10} 3^5 - \frac{1}{5} 2^5 + \frac{1}{10} \right] \\
=& \frac{1}{54} e^6 - \frac{1}{27} e^3 + \frac{1}{54} - \frac{3}{2} \\
=& \frac{1}{27} \left(\frac{1}{2} e^6 - e^3 - 40 \right).
\end{aligned}$$