

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 57 (Übung)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_A e^{\frac{x+y}{x-y}} d(x, y),$$

wobei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Trapez mit den Eckpunkten $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ und $(0, -1)$ ist.

Aufgabe 58 (Tutorium)

a) Berechnen Sie für $a, b, c > 0$ das Volumen des Ellipsoids

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_A (u + v) e^{-\frac{(u+v)^2}{8}} d(u, v),$$

wobei $A = \{(x - y, x + y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in [0, 1]^2\}$.

Aufgabe 59 (Übung)

Sei $0 < r < R$. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Menge

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} (R + r \cos(\vartheta)) \cos(\varphi) \\ (R + r \cos(\vartheta)) \sin(\varphi) \\ r \sin(\vartheta) \end{pmatrix} : \varphi, \vartheta \in [0, \pi] \right\}.$$

Aufgabe 60 (Tutorium)

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe von geeigneten Koordinatentransformationen:

a) $\int_A \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} d(x, y)$, wobei $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$,

b) $\int_A \frac{e^{-z}}{1 + x^2 + y^2} d(x, y, z)$, wobei $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, 0 \leq z \leq 2\}$,

c) $\int_A z d(x, y, z)$, wobei $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$.

Aufgabe 61 (Übung)

Für $a > 0$ sei $G_a \subseteq \mathbb{R}^2$ das beschränkte Gebiet, das von der Kurve

$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} a \sin(t) \\ a \sin^2(t) \cos(t) \end{pmatrix}$$

berandet wird.

a) Berechnen Sie $|\overline{G_a}|$ mit Hilfe des Satzes von Gauß.

b) Berechnen Sie $\int_{\overline{G_a}} x \, d(x, y)$ und $\int_{\overline{G_a}} y \, d(x, y)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Vektorfelder $v, w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v(x, y) = (0, \frac{x^2}{2})$, $w(x, y) = (-\frac{y^2}{2}, 0)$ und wenden Sie den Satz von Gauß an.

c) Geben Sie den Flächenschwerpunkt $(x_a, y_a) \in \mathbb{R}^2$ von $|\overline{G_a}|$ an, wobei

$$x_a := \frac{1}{|\overline{G_a}|} \int_{\overline{G_a}} x \, d(x, y) \quad \text{und} \quad y_a := \frac{1}{|\overline{G_a}|} \int_{\overline{G_a}} y \, d(x, y).$$

Aufgabe 62 (Tutorium)

Die Kurve γ sei definiert durch

$$\gamma: \left[0, \frac{\pi}{2} + 1\right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{cases} (\cos(t), \sin(2t)) & \text{für } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \left(t - \frac{\pi}{2}, 0\right) & \text{für } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right]. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie $\text{Spur}(\gamma)$.

b) Sei nun $G \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$G := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 2x\sqrt{1-x^2} \right\}$$

das von γ berandete beschränkte Gebiet.

(i) Berechnen Sie $|\overline{G}|$ mit Hilfe des Satzes von Gauß (vgl. S. 132).

(ii) Berechnen Sie $|\overline{G}|$, indem Sie $\int_{\overline{G}} 1 \, d(x, y)$ direkt berechnen.