Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 57 (Übung)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_A e^{\frac{x+y}{x-y}}\,\mathrm{d}(x,y),$$

wobei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Trapez mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ und $(0,-1)$ ist.

Lösungsvorschlag:

Die Menge A ist zwar ein Normalbereich bzgl. der x- bzw. der y-Achse, sodass wir auf die Idee kommen könnten, das Integral direkt zu berechnen. Dies liefe allerdings auf ein iteriertes Integral der Form $\int\int e^{\frac{x+y}{x-y}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ bzw. $\int\int e^{\frac{x+y}{x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ hinaus, dessen Wert nicht so einfach zu bestimmen ist. Die Idee besteht daher darin, $u = x-y$ und $v = x+y$ zu substituieren, da wir für festes $u \neq 0$ eine Stammfunktion von $v \mapsto e^{\frac{v}{u}}$ bestimmen können und das durch die Substitutionsregel (Satz 20.8) erhaltene Integral $\int\int e^{\frac{v}{u}} |\det g'(u,v)|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$ leichter lösen können (wobei g im Integrand die Transformation $(x,y) = g(u,v)$ beschreibt). Da

$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u+v \\ -u+v \end{pmatrix}$$

gilt, definieren wir die Matrix

$$S := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und betrachten die lineare Abbildung

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = S\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u+v \\ -u+v \end{pmatrix}.$$

Da $\det(S) = \frac{1}{2} \neq 0$ gilt, ist S bijektiv, also insbesondere injektiv. Weiter gilt $\det g'(u,v) = \det S = \frac{1}{2} \neq 0$ für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Setzen wir

$$B := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u \in [1,2], -u \leq v \leq u\},$$

so gilt wegen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \leq 0, x-y \in [1,2]\},$$

dass $A = g(B)$. Dies kann man sich anhand einer Skizze sehr gut veranschaulichen. Wir wollen aber $A = g(B)$ durch doppelte Inklusion zeigen: Ist $(u, v) \in B$, so folgt aus $-u \leq v$ bzw. $v \leq u$, dass $u+v \geq 0$ bzw. $-u+v \leq 0$ und damit auch $g_1(u,v) = \frac{1}{2}(u+v) \geq 0$ bzw. $g_2(u,v) = \frac{1}{2}(-u+v) \leq 0$. Weiter ist $g_1(u,v) - g_2(u,v) = \frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}(-u+v) = u \in [1,2]$. Damit muss auch $g(u,v) \in A$ gelten. Ist umgekehrt $(x,y) \in A$, so gilt $u := (x-y) \in [1,2]$ und wegen $x \geq 0$ und $y \leq 0$, dass $v := x+y \leq x-y = u$ und $-u = -x+y \leq x+y = v$. Also gilt $(u,v) \in B$ und $(x,y) = \frac{1}{2}((u+v),(-u+v)) = (g_1(u,v), g_2(u,v)) = g(u,v) \in g(B)$. Damit haben wir $g(B) \subseteq A$ sowie $A \subseteq g(B)$ und somit $A = g(B)$ nachgewiesen. Schließlich ist $(x,y) \mapsto e^{\frac{x+y}{x-y}} \in C(A,\mathbb{R})$ (man beachte, dass $A \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq y\}$). Somit sind die Voraussetzungen der Substitutionsregel (Satz 20.8) erfüllt und wir erhalten

$$\int_A e^{\frac{x+y}{x-y}} \,\mathrm{d}(x,y) = \int_B e^{\frac{v}{u}} |\det g'(u,v)| \,\mathrm{d}(u,v) = \frac{1}{2}\int_B e^{\frac{v}{u}} \,\mathrm{d}(u,v) = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}} \,\mathrm{d}v\right) \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left[ue^{\frac{v}{u}}\right]\Big|_{v=-u}^{v=u} \,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2 u(e^1 - e^{-1}) \,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{4}(e^1 - e^{-1})u^2\right]_1^2 = \frac{3}{4}(e^1 - e^{-1}).$$

Aufgabe 58 (Tutorium)

a) Berechnen Sie für $a, b, c > 0$ das Volumen des Ellipsoids

$$E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_A (u+v)e^{-\frac{(u+v)^2}{8}} \,\mathrm{d}(u,v),$$

wobei $A = \{(x-y, x+y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y) \in [0,1]^2\}$.

Lösungsvorschlag:

Zur Lösung dieser Aufgabe verwenden wir lineare Koordinatentransformationen und wenden hierbei die Substitutionsregel (Satz 20.8) an.

a) Für $a, b, c > 0$ definieren wir die Matrix $A := \operatorname{diag}(a,b,c) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(v) = Av.$$

Dann gilt $E = \varphi(B)$, wobei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ die dreidimensionale Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ ist. Offensichtlich ist B kompakt und des Weiteren messbar (vgl. Aufgabe 54 c)). Weiter ist φ injektiv (sogar bijektiv) und stetig differenzierbar mit $\varphi'(v) = A$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ (vgl. Skript, S.79, Beispiel (4)). Daher ist $\det \varphi'(v) = \det A = abc \neq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$. Damit sind die Voraussetzungen der Substitutionsregel erfüllt und wir erhalten aus ihr

$$|E| = \int_E 1 \,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(B)} 1 \,\mathrm{d}u = \int_B 1(\varphi(v))|\det \varphi'(v)| \,\mathrm{d}v = \int_B abc \,\mathrm{d}v = abc|B| = \frac{4}{3}\pi abc,$$

wobei wir in obiger Gleichungskette mit 1 die konstante Funktion $1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, 1(x) = 1$ bezeichnen.

b) Definieren wir

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(z) = Sz \quad \text{mit } S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

so folgt unmittelbar aus der Definition von A, dass $A = g(B)$, wobei $B := [0,1]^2$ ist. Weiter ist g stetig differenzierbar und $\det g'(z) = \det S = 2$ für alle $z \in \mathbb{R}^2$. Definieren wir ferner

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(u,v) := (u+v)e^{-\frac{(u+v)^2}{8}},$$

so sehen wir, dass $f \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und es gilt

$$f(g(x,y)) = f(x-y, x+y) = 2xe^{-\frac{(2x)^2}{8}} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Aus der Substitutionsregel und dem Satz von Fubini folgt nun

$$\begin{aligned}
&\int_A (u+v)e^{-\frac{(u+v)^2}{8}}\,\mathrm{d}(u,v) = \int_{g(B)} f(u,v)\,\mathrm{d}(u,v) = \int_B f(g(x,y))|\det g'(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) \\
=&\int_B 2xe^{-\frac{(2x)^2}{8}} \cdot 2\,\mathrm{d}(x,y) = 4\int_B xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}(x,y) \\
=&4\int_0^1 \left(\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = 4\int_0^1 \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^1 \mathrm{d}y = 4\int_0^1 (1-e^{-\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}y = 4(1-e^{-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 59 (Übung)

Sei $0 < r < R$. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Menge

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} (R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi) \\ (R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi) \\ r\sin(\vartheta) \end{pmatrix} : \varphi, \vartheta \in [0,\pi] \right\}.$$

Lösungsvorschlag:

Seien $0 < r < R$ und $I := (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Wir definieren

$$g\colon I^2 \to \mathbb{R}^3,\ g(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} g_1(\varphi,\vartheta) \\ g_2(\varphi,\vartheta) \\ g_3(\varphi,\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi) \\ (R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi) \\ r\sin(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Wir weisen nun nach, dass $F := g(I^2)$ ein reguläres Flächenstück im $\mathbb{R}^3$ ist. Hierzu stellen wir zunächst fest, dass g injektiv ist: Denn gilt $g(\varphi_1, \vartheta_1) = g(\varphi_2, \vartheta_2)$ für $(\varphi_1, \vartheta_1), (\varphi_2, \vartheta_2) \in I^2$, d.h.,

$$\begin{pmatrix} (R + r\cos(\vartheta_1))\cos(\varphi_1) \\ (R + r\cos(\vartheta_1))\sin(\varphi_1) \\ r\sin(\vartheta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos(\vartheta_2))\cos(\varphi_2) \\ (R + r\cos(\vartheta_2))\sin(\varphi_2) \\ r\sin(\vartheta_2) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

so folgt aus der dritten Komponente der Vektorgleichung (1) und $r \neq 0$, dass $\sin(\vartheta_1) = \sin(\vartheta_2)$. Weiterhin folgt aus $g(\varphi_1, \vartheta_1) = g(\varphi_2, \vartheta_2)$ (unter Anwendung von $\cos^2 + \sin^2 = 1$)

$$R^2 + 2rR\cos(\vartheta_1) + r^2 = \|g(\varphi_1, \vartheta_1)\|^2 = \|g(\varphi_2, \vartheta_2)\|^2 = R^2 + 2rR\cos(\vartheta_2) + r^2,$$

was wegen $R, r \neq 0$ $\cos(\vartheta_1) = \cos(\vartheta_2)$ impliziert. Damit ist

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta_1) \\ \sin(\vartheta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_2) \\ \sin(\vartheta_2) \end{pmatrix}.$$

Da $\vartheta \mapsto (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$ das Intervall $(-\pi, \pi]$ bijektiv auf den Rand des Einheitskreises $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 = 1\}$ abbildet und $I \subseteq (-\pi, \pi]$ gilt, muss $\vartheta_1 = \vartheta_2$ sein. Da nach Voraussetzung $R + r\cos(\vartheta_1) \geq R - r \neq 0$ und $\vartheta_1 = \vartheta_2$ gilt, erhalten wir aus den ersten beiden Komponenten der Vektorgleichung (1) ebenso

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{pmatrix},$$

sodass wir wieder aus der Bijektivität von $(-\pi, \pi] \to S^1$, $\varphi \mapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$, folgern, dass $\varphi_1 = \varphi_2$ gilt. Somit ist $(\varphi_1, \vartheta_1) = (\varphi_2, \vartheta_2)$. Also ist tatsächlich g injektiv. Ferner ist für alle $(\varphi, \vartheta) \in I^2$

$$g'(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \partial_\varphi g_1(\varphi,\vartheta) & \partial_\vartheta g_1(\varphi,\vartheta) \\ \partial_\varphi g_2(\varphi,\vartheta) & \partial_\vartheta g_2(\varphi,\vartheta) \\ \partial_\varphi g_3(\varphi,\vartheta) & \partial_\vartheta g_3(\varphi,\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi) & -r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ (R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 & r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Die Spalten $\partial_\varphi g(\varphi,\vartheta)$ und $\partial_\vartheta g(\varphi,\vartheta)$ von $g'(\varphi,\vartheta)$ stehen für alle $(\varphi,\vartheta) \in I^2$ orthogonal zueinander, denn

$$\begin{aligned} \partial_\varphi g(\varphi,\vartheta) \cdot \partial_\vartheta g(\varphi,\vartheta) =& (R + r\cos(\vartheta)) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \\ =& (R + r\cos(\vartheta))(-r\sin(\vartheta)) \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Damit sind insbesondere die Spalten von $g'(\varphi,\vartheta)$ linear unabhängig, sodass

$$\operatorname{rg}(g'(\varphi,\vartheta)) = 2 \quad \text{für alle } (\varphi,\vartheta) \in I^2.$$

Also ist in der Tat F ein reguläres Flächenstück im $\mathbb{R}^3$. Wir bemerken, dass $T = g(B)$ gilt mit $B := [0,\pi]^2$, sodass der Oberflächeninhalt $\mathcal{A}(T)$ der Menge T durch

$$\mathcal{A}(T) = \int_B \|n(g(\varphi,\vartheta))\| \, \mathrm{d}(\varphi,\vartheta)$$

gegeben ist (vgl. S.136, Skript). Nun ist für alle $(\varphi,\vartheta) \in B$

$$\begin{aligned} &\|n(g(\varphi,\vartheta))\| \\ =&\|\partial_\varphi g(\varphi,\vartheta) \times \partial_\vartheta g(\varphi,\vartheta)\| \\ =&\|r\cos(\varphi)\cos(\vartheta)(R + r\cos(\vartheta)), r\sin(\varphi)\cos(\vartheta)(R + r\cos(\vartheta)), r\sin(\vartheta)(R + r\cos(\vartheta))\| = r(R + \cos(\vartheta)). \end{aligned}$$

Daher folgt (unter Anwendung des Satzes von Fubini)

$$\mathcal{A}(T) = \int_B \|n(g(\varphi,\vartheta))\| \, \mathrm{d}(\varphi,\vartheta) = \int_0^\pi \left(\int_0^\pi r(R + \cos(\vartheta)) \, \mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi [rR\vartheta + r\sin(\vartheta)]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^\pi rR\pi \,\mathrm{d}\varphi = \pi^2 rR.$$

Aufgabe 60 (Tutorium)

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe von geeigneten Koordinatentransformationen:

a) $\int_A \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$, wobei $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$,

b) $\int_A \frac{e^{-z}}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y,z)$, wobei $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ 0 \le z \le 2\}$,

c) $\int_A z\,\mathrm{d}(x,y,z)$, wobei $A := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x^2+y^2+z^2 \le 1, \sqrt{x^2+y^2} \le z\right\}$.

Lösungsvorschlag:

a) Wir transformieren in Polarkoordinaten. Hierfür sei

$$g\colon [0,\infty) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2,\ g(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

die Polarkoordinatenabbildung. Dann gilt $A = g(B)$, wobei $B := [1,3] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Offensichtlich ist dann B kompakt und messbar sowie g auf $B \supseteq \mathring{B}$ injektiv. Weiter gilt für alle $(r,\varphi) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \supseteq \mathring{B}$, dass

$$g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_r g_1(r,\varphi) & \partial_\varphi g_1(r,\varphi) \\ \partial_r g_2(r,\varphi) & \partial_\varphi g_2(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

und damit

$$|\det g'(r,\varphi)| = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = |r| = r \ne 0.$$

Weiterhin ist $(x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ stetig auf A. Somit sind die Voraussetzungen der Substitutionsregel erfüllt: Wir wenden nun diese an und erhalten (unter Anwendung des Satzes von Fubini)

$$\int_A \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_B \frac{r^2\cos^2(\varphi) r\sin(\varphi)}{r^2} \cdot r\,\mathrm{d}(r,\varphi) = \int_1^3 r^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)\cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r$$

$$= \int_1^3 r^2 \left[-\frac{1}{3}\cos^3(\varphi) \right] \Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}r = \int_1^3 \frac{r^2}{3}\,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^3}{9} \right]_1^3 = 3 - \frac{1}{9} = \frac{26}{9}.$$

b) Wir transformieren in Zylinderkoordinaten. Hierfür sei

$$g\colon [0,\infty) \times [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ g(r,\varphi,z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$$

die Zylinderkoordinatenabbildung. Dann gilt $A = g(B)$, wobei $B := [0,2] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2]$. Offenbar ist g injektiv auf $B \backslash \{0\} \supseteq \mathring{B}$. Weiter gilt für alle $(r,\varphi,z) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R} \supseteq \mathring{B}$, dass

$$g'(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \partial_r g_1(r,\varphi,z) & \partial_\varphi g_1(r,\varphi,z) & \partial_z g_1(r,\varphi,z) \\ \partial_r g_2(r,\varphi,z) & \partial_\varphi g_2(r,\varphi,z) & \partial_z g_2(r,\varphi,z) \\ \partial_r g_3(r,\varphi,z) & \partial_\varphi g_3(r,\varphi,z) & \partial_z g_3(r,\varphi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sodass (nach Entwicklung der Determinante nach der letzten Spalte)

$$|\det g'(r,\varphi,z)| = |r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi)| = |r| = r \neq 0$$

folgt. Weiterhin ist $(x,y,z) \mapsto \frac{e^{-z}}{1+x^2+y^2}$ stetig auf A (sogar auf ganz $\mathbb{R}^3$). Somit sind die Voraussetzungen der Substitutionsregel erfüllt. Eine Anwendung der Substitutionsregel (zusammen mit dem Satz von Fubini) impliziert

$$\int_A \frac{e^{-z}}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_B \frac{e^{-z}}{1+r^2}\cdot r\,\mathrm{d}(r,\varphi,z) = \int_0^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 e^{-z}\frac{r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[e^{-z}\frac{1}{2}\log\left(1+r^2\right)\right]\Big|_{r=0}^{r=2}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}z = \int_0^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-z}\frac{1}{2}\log(5)\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}z = \int_0^2 \frac{\pi}{2}\log(5)e^{-z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{2}\log(5)\left[-e^{-z}\right]\Big|_0^2 = \frac{\pi}{2}\log(5)(1-e^{-2}).$$

c) Wir transformieren in Kugelkoordinaten. Hierfür sei

$$g\colon [0,\infty)\times[-\pi,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3,\ g(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))$$

die Kugelkoordinatenabbildung. Dann gilt $A = g(B)$, wobei $B := [0,1]\times[-\pi,\pi]\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$. Offenbar ist g auf $(0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(0,\frac{\pi}{2}) \supseteq \mathring{B}$ injektiv. Weiter gilt für alle $(r,\varphi,\vartheta) \in (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(0,\frac{\pi}{2}) \supseteq \mathring{B}$, dass

$$\begin{aligned} g'(r,\varphi,\vartheta) &= \begin{pmatrix}\partial_r g(r,\varphi,\vartheta) & \partial_\varphi g(r,\varphi,\vartheta) & \partial_\vartheta g(r,\varphi,\vartheta)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_r g_1(r,\varphi,\vartheta) & \partial_\varphi g_1(r,\varphi,\vartheta) & \partial_\vartheta g_1(r,\varphi,\vartheta) \\ \partial_r g_2(r,\varphi,\vartheta) & \partial_\varphi g_2(r,\varphi,\vartheta) & \partial_\vartheta g_2(r,\varphi,\vartheta) \\ \partial_r g_3(r,\varphi,\vartheta) & \partial_\varphi g_3(r,\varphi,\vartheta) & \partial_\vartheta g_3(r,\varphi,\vartheta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\vartheta) & -r\sin(\varphi)\cos(\vartheta) & -r\cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\cos(\vartheta) & r\cos(\varphi)\cos(\vartheta) & -r\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & 0 & r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man verifiziert schnell, dass $\partial_\vartheta g(r,\varphi,\vartheta) = (\cos(\vartheta))^{-1}\partial_r g(r,\varphi,\vartheta)\times\partial_\varphi g(r,\varphi,\vartheta)$ gilt, womit $g'(r,\varphi,\vartheta)$ von der Struktur $(a,b,\lambda(a\times b))$ mit Vektoren $a,b\in\mathbb{R}^3, \lambda>0$ ist. Nach Aufgabe 14 b) ist $\det(a,b,\lambda(a\times b)) \overset{14\text{ b)}}{=} \lambda\|a\times b\|^2 = \lambda^{-1}\|\lambda(a\times b)\|^2$. Daher erhalten wir für alle $(r,\varphi,\vartheta)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(0,\frac{\pi}{2})\supseteq\mathring{B}$ (mit $\lambda = (\cos(\vartheta))^{-1}$ und $\lambda(a\times b) = \partial_\vartheta g(r,\varphi,\vartheta)$)

$$|\det g'(r,\varphi,\vartheta)| = |\cos(\vartheta)|\cdot\|\partial_\vartheta g(r,\varphi,\vartheta)\|^2 = r^2\cos(\vartheta) \neq 0,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\cos(\vartheta) > 0$ für $(0,\frac{\pi}{2})$ und $\|\partial_\vartheta g(r,\varphi,\vartheta)\|^2 = r^2$ gilt (wie man leicht ausrechnet). Ferner ist die Abbildung $(x,y,z)\mapsto z$ offensichtlich stetig auf A (sogar auf ganz $\mathbb{R}^3$). Daher sind die Voraussetzungen der Substitutionsregel erfüllt und wir folgern

$$\int_A z\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_B r\sin(\vartheta)\cdot r^2\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}(r,\varphi,\vartheta) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 r^3\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \left[\frac{r^4}{4}\right]\Big|_{r=0}^{r=1} \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\vartheta$$

$$= \frac{1}{4} 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi}{4}\left[\sin^2(\vartheta)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Aufgabe 61 (Übung)

Für $a > 0$ sei $G_a \subseteq \mathbb{R}^2$ das beschränkte Gebiet, das von der Kurve

$$\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} a\sin(t) \\ a\sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix}$$

berandet wird.

a) Berechnen Sie $|\overline{G_a}|$ mit Hilfe des Satzes von Gauß.

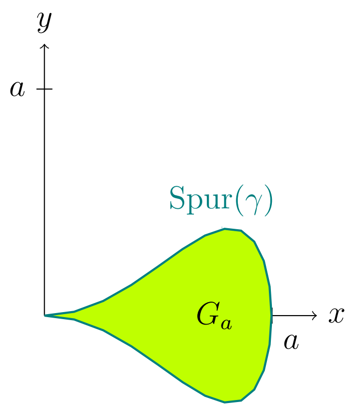
b) Berechnen Sie $\int_{\overline{G_a}} x\,\mathrm{d}(x,y)$ und $\int_{\overline{G_a}} y\,\mathrm{d}(x,y)$.
Hinweis: Betrachten Sie die Vektorfelder $v, w\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v(x,y) = (0, \frac{x^2}{2})$, $w(x,y) = (-\frac{y^2}{2}, 0)$ und wenden Sie den Satz von Gauß an.

c) Geben Sie den Flächenschwerpunkt $(x_a, y_a) \in \mathbb{R}^2$ von $|\overline{G_a}|$ an, wobei

$$x_a := \frac{1}{|\overline{G_a}|} \int_{\overline{G_a}} x\,\mathrm{d}(x,y) \quad \text{und} \quad y_a := \frac{1}{|\overline{G_a}|} \int_{\overline{G_a}} y\,\mathrm{d}(x,y).$$

Lösungsvorschlag:

a) Die Spur von γ sieht wie folgt aus:



Aus dem Gaußschen Satz folgt (vgl. S.132, Skript)

$$|\overline{G_a}| = \frac{1}{2} \int_{\gamma_-} (-y, x) \cdot \mathrm{d}(x,y)$$

(man beachte, dass wir entlang γ_- und nicht entlang γ integrieren müssen, da das Gebiet „links“ von der Kurve liegen muss (vgl. S.131, Skript)!).
Da $\gamma'(t) = (a\cos(t), 2a\sin(t)\cos^2(t) - a\sin^3(t))$ für alle $t \in [0,\pi]$ gilt, erhalten wir

$$\int_{\gamma^-} (-y,x) \cdot \mathrm{d}(x,y) = -\int_{\gamma} (-y,x) \cdot \mathrm{d}(x,y)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^\pi \begin{pmatrix} -a\sin^2(t)\cos(t) \\ a\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ 2a\sin(t)\cos^2(t) - a\sin^3(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= a^2 \int_0^\pi \sin^4(t) - \sin^2(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= a^2 \int_0^\pi \sin^2(t)(1-\cos^2(t)) - \sin^2(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= a^2 \int_0^\pi \sin^2(t) - 2\sin^2(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= a^2 \int_0^\pi \sin^2(t) - \frac{1}{2}\sin^2(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \sin^2(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass $t \mapsto \sin^2(t)$ π-periodisch ist und daher

$$\int_0^\pi \sin^2(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^\pi \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Durch partielle Integration erhält man eine Stammfunktion von $t \mapsto \sin^2(t)$:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int \sin(t)\cdot\sin(t)\,\mathrm{d}t &= -\sin(t)\cos(t) + \int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\sin(t)\cos(t) + \int 1 - \sin^2(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

sodass durch Umstellen

$$\int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t - \sin(t)\cos(t)\right)$$

folgt. Daher ist

$$\int_{\gamma^-} (-y, x)\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{4}\left[t - \sin(t)\cos(t)\right]_0^\pi = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Wir erhalten schließlich

$$|\overline{G}_a| = \frac{1}{2}\int_{\gamma^-} (-y,x)\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{\pi a^2}{8}.$$

b) Sei

$$v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ v(x,y) := \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt offenbar $\partial_1 v_2 = x$ und $\partial_2 v_1 = 0$. Nach dem Satz von Gauß gilt deshalb

$$\int_{\overline{G}_a} x\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\overline{G}_a} \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\gamma^-} v(x,y)\cdot\,\mathrm{d}(x,y).$$

Nun ist

$$\int_{\gamma^-} v(x,y)\cdot d(x,y) = -\int_0^\pi v(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int_0^\pi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}a^2\sin^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ 2a\sin(t)\cos^2(t) - a\sin^3(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(\underbrace{\int_0^\pi \sin^5(t)\,\mathrm{d}t}_{=:A} - 2\underbrace{\int_0^\pi \sin^3(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t}_{=:B} \right)$$

Wir bestimmen nun A und B. Aus partieller Integration folgt einerseits

$$B = \int_0^\pi (\sin^3(t)\cos(t)) \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}\sin^4(t)\cos(t)\right]_0^\pi + \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^5(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}A. \tag{2}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} A + B &= \int_0^\pi \sin^3(t)\underbrace{(\sin^2(t) + \cos^2(t))}_{=1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin(t) - \sin(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\cos(t) + \frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_0^\pi = \frac{4}{3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Aus Gleichungen (2) und (3) folgt schließlich $A = \frac{16}{15}$ und $B = \frac{4}{15}$. Somit ist

$$\int_{\overline{G}_a} x\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\gamma_-} (-y, x) \cdot \,\mathrm{d}(x,y) = \frac{a^3}{2}(A - 2B) \overset{(2)}{=} \frac{a^3}{2} \cdot 2B = \frac{4}{15}a^3.$$

Zur Berechnung von $\int_{\overline{G}_a} y\,\mathrm{d}(x,y)$ gehen wir analog vor. Wir definieren

$$w\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ w(x,y) := \begin{pmatrix} w_1(x,y) \\ w_2(x,y) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt offenbar $\partial_1 w_2 = 0$ und $\partial_2 w_1 = -y$. Nach dem Satz von Gauß gilt deshalb

$$\int_{\overline{G}_a} y\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\overline{G}_a} \partial_1 w_2 - \partial_2 w_1\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\gamma_-} w(x,y) \cdot \,\mathrm{d}(x,y).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_-} w(x,y) \cdot d(x,y) &= -\int_0^\pi w(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\pi \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a^2\sin^4(t)\cos^2(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ 2a\sin(t)\cos^2(t) - a\sin^3(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \frac{a^3}{2}\int_0^\pi \sin^4(t)\cos^3(t)\,\mathrm{d}t = 0, \end{aligned}$$

da mit der Substitution $s = \pi - t$

$$\int_0^\pi \sin^4(t)\cos^3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \underbrace{\sin^4(s-\pi)}_{=\sin^4(t)}\underbrace{\cos^3(s-\pi)}_{-\cos^3(t)}\,\mathrm{d}s = -\int_0^\pi \sin^4(s)\cos^3(s)\,\mathrm{d}s$$

folgt. Umstellen obiger Gleichung impliziert

$$2\int_0^\pi \sin^4(t)\cos^3(t)\,\mathrm{d}t = 0, \text{ d.h., } \int_0^\pi \sin^4(t)\cos^3(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Wir folgern

$$\int_{\overline{G}_a} y\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\gamma_-} w(x,y) \cdot \,\mathrm{d}(x,y) = \frac{a^3}{2}\int_0^\pi \sin^4(t)\cos^3(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

c) Nach Aufgabenteilen a) und b) ist

$$x_a = \frac{1}{|\overline{G_a}|}\int_{\overline{G_a}} x \,\mathrm{d}(x,y) = \frac{\frac{4}{15}a^3}{\frac{1}{8}\pi a^2} = \frac{32}{15\pi}a \quad \text{und} \quad y_a = \frac{1}{|\overline{G_a}|}\int_{\overline{G_a}} y \,\mathrm{d}(x,y) = 0.$$

Aufgabe 62 (Tutorium)

Die Kurve γ sei definiert durch

$$\gamma\colon \left[0, \frac{\pi}{2}+1\right] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = \begin{cases} (\cos(t), \sin(2t)) & \text{für } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ (t-\frac{\pi}{2}, 0) & \text{für } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+1\right]. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie Spur(γ).

b) Sei nun $G \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < 1,\ 0 < y < 2x\sqrt{1-x^2}\right\}$$

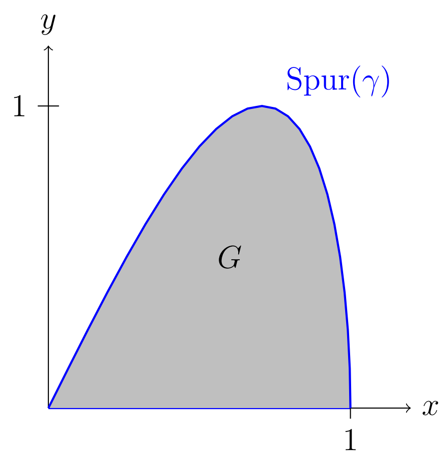
das von γ berandete beschränkte Gebiet.

(i) Berechnen Sie $|\overline{G}|$ mit Hilfe des Satzes von Gauß (vgl. S. 132).

(ii) Berechnen Sie $|\overline{G}|$, indem Sie $\int_{\overline{G}} 1 \,\mathrm{d}(x,y)$ direkt berechnen.

Lösungsvorschlag:

a) Die Spur von γ sieht wie folgt aus:



b) (i) Aus dem Gaußschen Satz folgt (vgl. S.132, Skript)

$$|\overline{G}| = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y, x) \cdot \mathrm{d}(x,y).$$

Da $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit

$$\gamma_1\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(2t)),$$

$$\gamma_2\colon \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+1\right] \to \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = \left(t - \frac{\pi}{2}, 0\right)$$

gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (-y,x)\cdot\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{\gamma_1} (-y,x)\cdot\,\mathrm{d}(x,y) + \int_{\gamma_2} (-y,x)\cdot\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t-\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\sin(t) + 2\cos(2t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2(t)\cos(t) + 2(1-2\sin^2(t))\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) - \sin^2(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\left[-\frac{1}{3}\sin^3(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ die Additionstheoreme $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ und $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\sin^2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, angewendet haben. Damit ist

$$|\overline{G}| = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y,x)\cdot\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

(ii) Die Abschließung $\overline{G}$ ist durch

$$\overline{G} := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x\sqrt{1-x^2}\right\}$$

gegeben und daher ein Normalbereich bzgl. der x-Achse. Daher ist

$$|\overline{G}| = \int_{\overline{G}} 1\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^{2x\sqrt{1-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}^{\,3}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

in Übereinstimmung mit unserem Ergebnis in (i).