

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 63 (Übung)

- a) Es sei $F_0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{F_0} |x| \, d\sigma.$$

- b) Es seien $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$ für ein $r > 0$, $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$ und $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$. Berechnen Sie

$$\int_G \Delta \varphi(x, y) \, d(x, y)$$

mit Hilfe des Divergenzsatzes (Satz 21.2).

Hinweis: Es gilt $\Delta \varphi = \operatorname{div}(\nabla \varphi)$.

Aufgabe 64 (Tutorium)

Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ und

$$F_0 := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}.$$

Weiterhin sei das Vektorfeld $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) = (x, y, -2z)$ gegeben. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{F_0} v \cdot d\mathbf{o}$$

- a) direkt und
b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 65 (Übung)

Es sei $K := Z \cap E$ der Schnitt des Zylinders $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

- a) Bestimmen Sie eine doppelpunktfreie Kurve Γ , sodass $\operatorname{Spur}(\Gamma) = K$.

b) Sei Γ eine Kurve wie in a). Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} (-y^3, x^3, z) \cdot d(x, y, z)$$

- (i) direkt und
- (ii) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 66 (Tutorium)

Untersuchen Sie, in welchen Punkten $x + iy \in \mathbb{C}$ ($x, y \in \mathbb{R}$) die folgenden Funktionen komplex differenzierbar und ob die Funktionen holomorph sind.

- a) $f_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_1(x + iy) = xy + ixy$,
- b) $f_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_2(x + iy) = y^2 \sin(x) + iy$,
- c) $f_3: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_3(x + iy) = \frac{ix+y}{x^2+y^2}$,
- d) $f_4: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_4(x + iy) = |z|^2$.

Aufgabe 67 (Übung)

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf komplexe Differenzierbarkeit bzw. Holomorphie und geben Sie die Ableitung f' dort, wo sie existiert, an.

- (i) $f(z) = z \operatorname{Re} z$,
- (ii) $f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$.

b) Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf G . Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant auf G , so ist f konstant auf G .

Aufgabe 68 (Tutorium)

a) Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit $(\operatorname{Re} f)(z) = \cos(x) \cosh(y)$ für $z = x + iy$ und $f(0) = 1$. Bestimmen Sie $\operatorname{Im} f$.

b) Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale.

- (i) $\int_{\gamma} z \operatorname{Re} z \, dz$, wobei γ ein Weg von 0 nach $1 + i$ mit $\operatorname{Spur}(\gamma) = \{x + iy: x \in [0, 1], y = x^2\}$ ist.
- (ii) $\int_{\gamma} |z|^2 \, dz$, wobei γ den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten 0, 1, i im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.
- (iii) $\int_{\gamma} \frac{1}{z-2} \, dz$, wobei $\gamma(t) := e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Eine Information Ihrer Fachschaft:



</>
KEEP CALM

WAS? Das Higgsboson
oder wie die
Teilchen ihre Masse
bekommen

WANN? Freitag, 10.07.
15:45 Uhr

WO? Zoom, siehe FS-Seite:
<https://fachschaft.physik.kit.edu/>

IT'S NOT
ROCKET SCIENCE

eine Veranstaltung des
Mentorenprogramms