

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 69 (Übung)

a) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$(i) \int_{\gamma} \frac{\sin(e^z)}{z} dz, \quad \gamma(t) := e^{i3t}, t \in [0, 2\pi],$$

$$(ii) \int_{\gamma} \frac{\cosh(z)}{4z^3 - z} dz, \quad \gamma(t) := \frac{1}{4}e^{-it}, t \in [0, 2\pi].$$

b) Bestimmen Sie alle Funktionen $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit $f(2z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 70 (Tutorium)

Für $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ parametrisiert der Weg $\gamma_{z_0, r}(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, den Rand des Kreises mit Radius r und Mittelpunkt z_0 . Im Folgenden sei immer $a > 0$, $a \neq 1$. Berechnen Sie

$$(i) \int_{\gamma_{-i, 1}} \frac{\sin(z)}{z + i} dz, \quad (ii) \int_{\gamma_{1, 1}} \frac{1}{(z + 1)(z - 1)^3} dz, \quad (iii) \int_{\gamma_{0, 1}} \frac{e^{-z}}{(z - \pi)^2} dz,$$

$$(iv) \int_{\gamma_{0, 1}} \frac{a \cos(z)}{az - 1} dz, \quad (v) \int_{\gamma_{i\frac{3a}{4}, \frac{a}{2}}} \frac{1}{z^2 + a^2} dz, \quad (vi) \int_{\gamma_{0, 1}} \int_{\gamma_{0, 2}} \frac{|w|e^{\pi^2 z}}{z - |w|^2} dz dw.$$

Aufgabe 71 (Übung)

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

zu berechnen. Hierfür seien für $R > \varepsilon > 0$ die folgenden Wege definiert:

$$\begin{aligned} \gamma_{1, \varepsilon, R}(t) &= t, \quad t \in [\varepsilon, R], & \gamma_{2, R}(t) &= Re^{it}, \quad t \in [0, \pi], \\ \gamma_{3, \varepsilon, R}(t) &= t, \quad t \in [-R, -\varepsilon], & \gamma_{4, \varepsilon}(t) &= \varepsilon e^{it}, \quad t \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Betrachten Sie nun die Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ und finden Sie anhand obiger Wege einen Weg, für den Sie den Cauchyschen Integralsatz anwenden können. Führen Sie dann den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ durch.

Aufgabe 72 (Tutorium)

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Wert der Fresnelintegrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

zu bestimmen. Hierzu definieren wir für jedes $R > 0$ die Wege $\gamma_{j,R}: [0, R] \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 1, 2, 3$) durch

$$\gamma_{1,R}(t) := t, \quad \gamma_{2,R}(t) := R + it, \quad \gamma_{3,R}(t) := (1 + i)t.$$

a) Zeigen Sie

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz$$

Hinweis: Cauchyscher Integralsatz.

b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzung

$$\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz \longrightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

Folgern Sie $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (Hinweis: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

c) Bestimmen Sie den Wert der uneigentlichen Integrale $\int_0^\infty \sin(x^2) dx$ und $\int_0^\infty \cos(x^2) dx$.

Aufgabe 73 (Übung)

a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

b) Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Zeigen Sie: Ist $w \in \mathbb{C}$, so existiert eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$ gilt.

Aufgabe 74 (Tutorium)

a) Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Zeigen Sie: Gilt $\operatorname{Re} f \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$, so ist f konstant.

b) Beweisen Sie oder widerlegen Sie: Es existiert genau eine Funktion $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit

$$(i) f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^4} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (ii) f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{|k|^5} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

$$(iii) f(k) = k^2 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (iv) f\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \left(4 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$