Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Yonas Mesfun

SS 2020
09.07.2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 69 (Übung)

a) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\text{(i)} \quad \int_\gamma \frac{\sin(e^z)}{z}\,\mathrm{d}z, \quad \gamma(t) := e^{i3t}, t \in [0, 2\pi],$$

$$\text{(ii)} \quad \int_\gamma \frac{\cosh(z)}{4z^3 - z}\,\mathrm{d}z, \quad \gamma(t) := \frac{1}{4}e^{-it}, t \in [0, 2\pi].$$

b) Bestimmen Sie alle Funktionen $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit $f(2z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag:

a) (i) Da die Funktion $z \mapsto \sin(e^z)$, $z \in \mathbb{C}$, als Verknüpfung von auf $\mathbb{C}$ holomorpher Funktionen selbst auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, ist nach der Cauchyschen Integralformel (man beachte, dass γ *nicht* einfach geschlossen ist, sondern den Rand des Einheitskreises *dreimal* durchläuft)

$$\int_\gamma \frac{\sin(e^z)}{z}\,\mathrm{d}z = 3 \cdot 2\pi i \sin(e^0) = 6\pi i \sin(1).$$

(ii) Da $(4z^2 - 1) = 4(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, ist die Funktion $z \mapsto f(z) := \frac{\cosh^2(z)}{4z^2-1}$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{\pm\frac{1}{2}\} \supseteq \overline{U_{\frac{1}{4}}(0)} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leq \frac{1}{4}\}$. Nach der Cauchyschen Integralformel ist daher

$$\int_\gamma \frac{\cosh(z)}{4z^3 - z}\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^-} \frac{\cosh(z)}{4z^3 - z}\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^-} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z = -2\pi i f(0) = -2\pi i \frac{\cosh(0)}{0-1} = 2\pi i.$$

Man beachte, dass die Cauchysche Integralformel nicht direkt für den Weg γ anwendbar ist, da dieser *nicht* positiv orientiert ist. Deshalb muss man die Orientierung des Weges umkehren und zu $\gamma^-(t) := \gamma(0 + 2\pi - t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ übergehen.

b) Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit $f(2z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Da $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ gilt, ist f nach Satz 22.10 analytisch und es gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Leiten wir für $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $f(2z) = f(z)$ n-mal ab, so erhalten wir (aus der Kettenregel) $2^n f^{(n)}(2z) = f^{(n)}(z)$. Setzen wir $z = 0$, erhalten wir hieraus $2^n f^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$, also $f^{(n)}(0) = 0$. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war, folgern wir $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir dies in (1) ein, so folgt

$$f(z) = f(0) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

womit f konstant sein muss. Andererseits gilt offensichtlich, dass jede konstante Funktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und die Gleichung $g(z) = g(2z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllt. Daher besteht die Menge der holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(2z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ genau aus den konstanten Funktionen.

Aufgabe 70 (Tutorium)

Für $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ parametrisiert der Weg $\gamma_{z_0,r}(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, den Rand des Kreises mit Radius r und Mittelpunkt z_0. Im Folgenden sei immer $a > 0$, $a \neq 1$. Berechnen Sie

$$\text{(i)} \int_{\gamma_{-i,1}} \frac{\sin(z)}{z+i}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{(ii)} \int_{\gamma_{1,1}} \frac{1}{(z+1)(z-1)^3}\,\mathrm{d}z, \quad \text{(iii)} \int_{\gamma_{0,1}} \frac{e^{-z}}{(z-\pi)^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$\text{(iv)} \int_{\gamma_{0,1}} \frac{a\cos(z)}{az-1}\,\mathrm{d}z, \quad \text{(v)} \int_{\gamma_{i\frac{3a}{4},\frac{a}{2}}} \frac{1}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{(vi)} \int_{\gamma_{0,1}} \int_{\gamma_{0,2}} \frac{|w|e^{\pi^2 z}}{z-|w|^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w.$$

Lösungsvorschlag:

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, so folgt aus der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen (vgl. Satz 22.9), dass

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } w \in \operatorname{int}(\gamma_{z_0,r})$$

(hier ist $\operatorname{int}(\gamma_{z_0,r}) = U_r(z_0) := \{w \in \mathbb{C} \colon |w - z_0| < r\}$). Mit Hilfe dieses Zusammenhangs (und einer geschickten Wahl von f) können wir daher die Integrale auf elegante Weise bestimmen.

(i) Seien $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sin(z)$ und $w := -i$. Dann ist f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, $w \in \operatorname{int}(\gamma_{-i,1})$ und nach der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{\gamma_{-i,1}} \frac{\sin(z)}{z+i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{-i,1}} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z \right) = 2\pi i f(w) = 2\pi i \sin(-i) = 2\pi \sinh(1).$$

(ii) Seien $f\colon \mathbb{C}\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z+1}$ und $w := 1$. Dann ist f auf $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ holomorph, $w \in \operatorname{int}(\gamma_{1,1})$ und aus der Cauchyschen Integralformel folgt

$$\int_{\gamma_{1,1}} \frac{1}{(z+1)(z-1)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma_{1,1}} \frac{f(z)}{(z-w)^3}\,\mathrm{d}z \right) = \pi i f^{(2)}(w) = \frac{2\pi i}{(z+1)^3}\bigg|_{z=1} = \frac{\pi i}{4}.$$

(iii) Sei $f\colon \mathbb{C}\backslash\{\pi\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-\pi)^2}$. Dann ist $\pi \notin \operatorname{int}(\gamma_{0,1})$, die Cauchysche Integralformel also nicht anwendbar. Aber da f auf $\mathbb{C}\backslash\{\pi\} \supseteq \overline{U_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$ holomorph ist, können wir den Cauchyschen Integralsatz anwenden, sodass

$$\int_{\gamma_{0,1}} \frac{e^{-z}}{(z-\pi)^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{0,1}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

(iv) Seien $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\cos(z)$ und $a>0, a\neq 1$. Dann ist f auf $\mathbb{C}$ holomorph und falls $a>1$ ist, ist $\frac{1}{a}\in \operatorname{int}(\gamma_{0,1})$ und aus der Cauchyschen Integralformel folgt dann

$$\int_{\gamma_{0,1}} \frac{a\cos(z)}{az-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{0,1}} \frac{f(z)}{z-\frac{1}{a}}\,\mathrm{d}z\right) = 2\pi i\cos\left(\frac{1}{a}\right).$$

Ist andererseits $0<a<1$, so ist $\frac{1}{a}\notin \operatorname{int}(\gamma_{0,1})$, sodass die Cauchysche Integralformel nicht anwendbar ist. Jedoch ist dann der Integralsatz anwendbar, da dann die Funktion $z\mapsto \frac{\cos(z)}{az-1}$ auf $\mathbb{C}\backslash\{\frac{1}{a}\}\supseteq \overline{U_1(0)}$ holomorph ist. Daher ist für $0<a<1$

$$\int_{\gamma_{0,1}} \frac{a\cos(z)}{az-1}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Zusammengefasst haben wir also

$$\int_{\gamma_{0,1}} \frac{a\cos(z)}{az-1}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i\cos(\frac{1}{a}) & \text{für } a>1,\\ 0 & \text{für } 0<a<1.\end{cases}$$

(v) Es ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{i\frac{3a}{4},\frac{a}{2}}} \frac{1}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_{i\frac{3a}{4},\frac{a}{2}}} \frac{1}{2ia}\left(\frac{1}{z-ia}-\frac{1}{z+ia}\right)\mathrm{d}z\\ &= \frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{i\frac{3a}{4},\frac{a}{2}}} \frac{1}{z-w}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{i\frac{3a}{4},\frac{a}{2}}} \frac{1}{z+w}\,\mathrm{d}z\right)\\ &\overset{(*)}{=} \frac{\pi}{a}(1-0) = \frac{\pi}{a},\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ für das erste Integral die Cauchysche Integralformel (mit $f\equiv 1$, $w:=ia$) und für das zweite Integral den Cauchyschen Integralsatz angewendet haben.

(vi) Da $\operatorname{Spur}(\gamma_{0,1})\subseteq \operatorname{int}(\gamma_{0,2})$ gilt, können wir die Cauchysche Integralformel für das innere Integral anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{0,1}}\int_{\gamma_{0,2}} \frac{|w|e^{\pi^2 z}}{z-|w|^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w &= \int_{\gamma_{0,1}} |w| \int_{\gamma_{0,2}} \frac{e^{\pi^2 z}}{z-|w|^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w = 2\pi i\int_{\gamma_{0,1}} |w|\cdot e^{\pi^2|w|^2}\,\mathrm{d}w\\ &= 2\pi i\int_0^{2\pi} |e^{it}|\, e^{\pi^2|e^{it}|^2} ie^{it}\,\mathrm{d}t = 2\pi i e^{\pi^2}\int_0^{2\pi} ie^{it}\,\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

Man beachte, dass man für das äußere Integral $\int_{\gamma_{1,0}} |w|e^{\pi^2|w|^2}\,\mathrm{d}w$ *nicht* den Cauchyschen Integralsatz anwenden kann, da der Integrand nicht holomorph ist (dies folgt aus Aufgabe 67 b), da $\operatorname{Im}(|w|e^{\pi^2|w|^2})\equiv 0$, also insbesondere konstant ist).

Aufgabe 71 (Übung)

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen. Hierfür seien für $R > \varepsilon > 0$ die folgenden Wege definiert:

$$\gamma_{1,\varepsilon,R}(t) = t,\ t \in [\varepsilon, R], \qquad \gamma_{2,R}(t) = Re^{it},\ t \in [0,\pi],$$
$$\gamma_{3,\varepsilon,R}(t) = t,\ t \in [-R, -\varepsilon], \qquad \gamma_{4,\varepsilon}(t) = \varepsilon e^{it},\ t \in [0,\pi].$$

Betrachten Sie nun die Funktion $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ und finden Sie anhand obiger Wege einen Weg, für den Sie den Cauchyschen Integralsatz anwenden können. Führen Sie dann den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ und $R \to \infty$ durch.

Lösungsvorschlag:

Wir führen vorerst eine nützliche Definition ein: Sind $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ $(j = 1, \dots, n)$, $n \geq 2$, Wege gegeben, sodass $\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$, $j = 1, \dots, n-1$, so definieren wir die Summe $\gamma_1 + \dots + \gamma_n \colon [a_1, b_1 + \sum_{j=2}^n (b_j - a_j)] \to \mathbb{C}$ durch

$$(\gamma_1 + \dots + \gamma_n)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a_1, b_1], \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2], \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \gamma_j\left(t - b_1 - \sum_{k=2}^{j-1}(b_k - a_k) + a_j\right), & t \in [b_1 + \sum_{k=2}^{j-1}(b_k - a_k), b_1 + \sum_{k=2}^{j}(b_k - a_k)], \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \gamma_n\left(t - b_1 - \sum_{k=2}^{n-1}(b_k - a_k) + a_n\right), & t \in [b_1 + \sum_{k=2}^{n-1}(b_k - a_k), b_1 + \sum_{k=2}^{n}(b_k - a_k)]. \end{cases}$$

Die Summe $\gamma_1 + \dots + \gamma_n$ entsteht also durch Konkatenation („Aneinanderhängen“) der Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Man sieht schnell ein, dass dann auch $\gamma_1 + \dots + \gamma_n$ ein Weg ist und dass

$$\int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z$$

für jede stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit $\bigcup_{j=1}^n \mathrm{Spur}(\gamma_j) \subseteq D$.
Nun zur eigentlichen Aufgabe: Sei $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Dann ist f holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Für $0 < \varepsilon < R$ betrachten wir den einfach geschlossenen Weg $\gamma_{\varepsilon,R} := \gamma_{1,\varepsilon,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,\varepsilon,R} + \gamma_{4,\varepsilon}^-$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist dann

$$\begin{aligned} 0 = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_{1,\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{3,\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_\varepsilon^R f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-R}^{-\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Umstellen obiger Gleichung ergibt

$$\int_\varepsilon^R f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-R}^{-\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{2}$$

Wie man leicht nachprüft, gilt $f(-t) = -\overline{f(t)}$, $t > 0$, sodass

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^R f(-t)\,\mathrm{d}t = -\int_\varepsilon^R \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

und somit die linke Seite von (2)

$$\int_{\varepsilon}^{R} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-R}^{-\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{R} f(t) - \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{R} 2i\,\mathrm{Im}\,f(t)\,\mathrm{d}t = 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Daher ist nach (2)

$$2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{3}$$

Wir bestimmen nun $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z$ und $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z - i\pi =& \int_0^{\pi} f(\varepsilon e^{it}) i\varepsilon e^{it}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} i\,\mathrm{d}t \ = \int_0^{\pi} \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} i\,\mathrm{d}t\\ =& i\int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{it}} - 1\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

und daher

$$\left|\int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z - i\pi\right| \le \int_0^{\pi} \underbrace{\left|e^{i\varepsilon e^{it}} - 1\right|}_{\underset{(\varepsilon\to 0)}{\longrightarrow} 0 \text{ glm.}}\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0),$$

wobei der Integrand wegen der Stetigkeit der (komplexen) Exponentialfunktion im Punkt $z = 0$ gleichmäßig gegen 0 und damit auch das entsprechende Integral gegen 0 konvergiert. Daher gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z = i\pi. \tag{4}$$

Wir wenden uns nun $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z$ zu. Sei hierfür $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^{\pi} e^{iRe^{it}}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{\pi} \left|e^{iRe^{it}}\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} e^{-R\sin(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\delta} e^{-R\sin(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi-\delta}^{\pi} e^{-R\sin(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi-\delta} e^{-R\sin(t)}\,\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^{\delta} 1\,\mathrm{d}t + \int_{\pi-\delta}^{\pi} 1\,\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi-\delta} e^{-R\sin(\delta)}\,\mathrm{d}t\\ &\le 2\delta + e^{-R\sin(\delta)}(\pi - 2\delta),\end{aligned}$$

sodass wir hieraus

$$\limsup_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le 2\delta \quad \text{für alle } \delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

folgern. Somit erhalten wir

$$\limsup_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = 0 \quad \text{und damit} \quad \lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = 0. \tag{5}$$

Mit (4) und (5) erhalten wir schließlich aus (3)

$$2i\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 2i\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = i\pi - 0 = i\pi,$$

und damit

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 72 (Tutorium)

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Wert der Fresnelintegrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

zu bestimmen. Hierzu definieren wir für jedes $R > 0$ die Wege $\gamma_{j,R}\colon [0,R] \to \mathbb{C}$ $(j = 1,2,3)$ durch

$$\gamma_{1,R}(t) := t, \quad \gamma_{2,R}(t) := R + it, \quad \gamma_{3,R}(t) := (1+i)t.$$

a) Zeigen Sie

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z$$

Hinweis: Cauchyscher Integralsatz.

b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzung

$$\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \longrightarrow 0 \quad (R \to \infty).$$

Folgern Sie $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (Hinweis: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

c) Bestimmen Sie den Wert der uneigentlichen Integrale $\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ und $\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag:

a) Sei $R > 0$. Der Weg $\gamma_R := \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,R}^-$ (vgl. den Lösungsvorschlag zur Aufgabe 71 für die präzise Definition der Summe von Wegen) ist ein einfach geschlossenener, stückweise stetig differenzierbarer Weg. Da $z \mapsto e^{-z^2}$, $z \in \mathbb{C}$, holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$0 = \int_{\gamma_R} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Umstellen liefert die gewünschte Gleichung.

b) Es gilt

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^R e^{-(R+it)^2} i\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^R \left|e^{-(R+it)^2}\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^R e^{-\operatorname{Re}(R+it)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^R e^{t^2-R^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{t\le R}{\le} \int_0^R e^{Rt-R^2}\,\mathrm{d}t = e^{-R^2}\left[\frac{1}{R}e^{Rt}\right]_{t=0}^{t=R} = \frac{1-e^{-R^2}}{R} \longrightarrow 0$$

für $R \to \infty$. Aus Aufgabenteil a) folgt damit

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + 0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

c) Für $R > 0$ ist

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^R e^{-(1+i)^2t^2}(1+i)\,\mathrm{d}t = (1+i)\int_0^R e^{-2it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}R} e^{-ix^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2}R}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x - i\int_0^{\sqrt{2}R}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2}R}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{2}R}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2}R}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{2}R}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right),$$

sodass

$$\sqrt{2}\int_0^{2\sqrt{R}}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \mathrm{Im}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$\sqrt{2}\int_0^{2\sqrt{R}}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z - \mathrm{Im}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Damit erhalten wir aus b)

$$\sqrt{2}\int_0^{\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\sqrt{2}\int_0^{2\sqrt{R}}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\left(\mathrm{Re}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \mathrm{Im}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\right) \overset{\text{b)}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

und genauso

$$\sqrt{2}\int_0^{\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\sqrt{2}\int_0^{2\sqrt{R}}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\left(\mathrm{Re}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z - \mathrm{Im}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\right) \overset{\text{b)}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

erhalten. Damit ist

$$\int_0^{\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Aufgabe 73 (Übung)

a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

b) Sei $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Zeigen Sie: Ist $w \in \mathbb{C}$, so existiert eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, sodass $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$ gilt.

Lösungsvorschlag:

a) Wir betrachten die Funktion

$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = zf(z).$$

Dann ist g als Produkt von auf $\mathbb{C}$ holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}$ holomorph. Wir behaupten, dass g beschränkt ist. In der Tat, für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ ist

$$|g(z)| = |z||f(z)| \leq |z| \cdot \frac{1}{|z|} \leq 1.$$

Andererseits ist die stetige Funktion $z \mapsto |g(z)|$ auf der kompakten Menge $K := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leq 1\}$ beschränkt, d.h., es existiert ein $M > 0$, sodass $|g(z)| \leq M$ für alle $z \in K$ gilt. Somit folgt insgesamt

$$|g(z)| \leq \max\{1, M\} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Nach dem Satz von Liouville muss daher g konstant sein, d.h., es muss ein $c \in \mathbb{C}$ exisitieren sodass $g(z) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Insbesondere folgt hieraus

$$f(z) = g(z)\frac{1}{z} = \frac{c}{z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Wäre $c \neq 0$, so wäre daher f im Punkt $z = 0$ nicht stetig, im Widerspruch dazu, dass f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph (und damit insbesondere stetig) ist. Also muss $c = 0$ sein. Damit muss $f \equiv 0$ sein.

b) Angenommen, die Aussage wäre falsch, Dann gäbe es ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass $|f(z) - w| \geq \varepsilon$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Funktion

$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = \frac{1}{f(z) - w}.$$

Dann ist g holomorph und beschränkt, da

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Nach dem Satz von Liouville muss dann g konstant sein, d.h., es muss ein $c \in \mathbb{C}$ existieren mit $g \equiv c$. Aus der Definition von g folgt, dass $c \neq 0$ sein muss, sodass dann auch $f = w + c^{-1}$ konstant sein müsste. Widerspruch.

Aufgabe 74 (Tutorium)

a) Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Zeigen Sie: Gilt $\operatorname{Re} f \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$, so ist f konstant.

b) Beweisen Sie oder widerlegen Sie: Es existiert genau eine Funktion $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit

(i) $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^4} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, (ii) $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{|k|^5} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

(iii) $f(k) = k^2 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, (iv) $f\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \left(4 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag:

a) Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ und $\operatorname{Re} f \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion

$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = e^{f(z)}.$$

Dann ist g als Verknüpfung von auf ganz $\mathbb{C}$ holomorpher Funktionen ebenfalls auf $\mathbb{C}$ holomorph. Weiterhin ist g beschränkt, da

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^M \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Nach dem Satz von Liouville muss daher g konstant sein. Damit muss aber auch $|g|$ konstant sein, d.h., es muss ein $c > 0$ existieren, sodass

$$|g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} = c \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gilt. Hieraus folgt $\operatorname{Re} f(z) = \log(c)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h., $\operatorname{Re} f$ ist konstant. Nach Aufgabe 67 b) muss damit auch f konstant sein.

b) Zur Lösung dieser Aufgabe wollen wir den Identitätssatz verwenden.

(i) Die Aussage ist richtig. Wir definieren $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = z^4$. Dann gilt $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ und g stimmt mit f auf der Menge

$$S := \left\{ \frac{1}{k} \colon k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\} \subseteq \mathbb{C}$$

überein. Da die Menge S den Punkt $0 \in \mathbb{C}$ als Häufungspunkt hat, müssen f und g übereinstimmen. Also gilt $f(z) = g(z) = z^4$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Die Aussage ist falsch. Wir definieren

$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = z^5.$$

Dann gilt $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ und g stimmt mit f auf der Menge

$$S := \left\{ \frac{1}{k} \colon k \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{C} \right\}$$

überein. Da die Menge S den Punkt $0 \in \mathbb{C}$ als Häufungspunkt hat, muss $f = g$ nach dem Identitätssatz gelten. Dann erhielten wir aber für jedes $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$ den Widerspruch $\frac{1}{|k|^5} = f\left(\frac{1}{k}\right) = g\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^5} = -\frac{1}{|k|^5}$.

(iii) Die Aussage ist falsch, da es mehrere auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit dieser Eigenschaft gibt. Zum Beispiel hat die holomorphe Funktion

$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = z^2$$

diese Eigenschaft. Es gibt aber holomorphe Funktionen $1 \neq h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit $h(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Beispiele sind $h_1(z) = \cos^2(\pi z)$ oder $h_2(z) = 1 + \sin(\pi z)$, $z \in \mathbb{C}$. Dann haben aber die Funktionen $g_1(z) = h_1(z)g(z)$ und $g_2(z) = h_2(z)g(z)$ ebenfalls die Eigenschaft in (iii), aber offensichtlich sind die Funktionen g, g_1 und g_2 paarweise verschieden.

(iv) Die Aussage ist wahr. Der besseren Lesbarkeit halber schreiben wir im Folgenden $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann liest sich die angegebene Gleichung wie folgt

$$\begin{aligned} f\left(\log\left(1+u_n\right)\right) = (4-u_n^2)(1+u_n) &= (2-u_n)(2+u_n)(1+u_n) \\ &= (3-(1+u_n))(1+(1+u_n))(1+u_n) \\ &= \left(3-e^{\log(1+u_n)}\right)\left(1+e^{\log(1+u_n)}\right)e^{\log(1+u_n)} \\ &= 3e^{\log(1+u_n)} + 2e^{2\log(1+u_n)} - e^{3\log(1+u_n)}. \end{aligned}$$

Wir definieren daher

$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = 3e^z + 2e^{2z} - e^{3z}.$$

Dann ist $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ und es gilt $f(\log(1+u_n)) = g(\log(1+u_n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Menge

$$S := \{\log(1+u_n)\colon n \in \mathbb{N}\}$$

den Punkt $0 \in \mathbb{C}$ als Häufungspunkt hat (denn es gilt $\lim_{n\to\infty} \log(1+u_n) = \log(1) = 0$ nach der Stetigkeit des reellen Logarithmus), folgt aus dem Identitätssatz $f = g$, also

$$f(z) = 3e^z + 2e^z - e^{3z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$