

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 75 (Übung)

- a) Beweisen Sie: Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und hat $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{z_0\})$ in $z_0 \in D$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\operatorname{res}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} g^{(m-1)}(z),$$

wobei $g(z) := (z - z_0)^m f(z)$ für $z \in D \setminus \{z_0\}$.

- b) Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(e^z - 1)(z - 1)^2} dz$$

für den einfach geschlossenen Weg $\gamma(t) := 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 76 (Tutorium)

Für $r > 0$ sei $\gamma_r: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = re^{it}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

$$(i) \int_{\gamma_4} \frac{ze^{iz}}{z - \pi} dz, \quad (ii) \int_{\gamma_3} \frac{e^z}{(z - 1)(z + 1)^2(z + 4)} dz,$$

$$(iii) \int_{\gamma_2} e^{\frac{z}{1-z}} dz, \quad (iv) \int_{\gamma_1} \frac{z}{e^{iz} - 1} dz.$$

Aufgabe 77 (Übung)

In dieser Aufgabe wollen wir für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes bestimmen. Hierzu betrachten wir die holomorphe Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ auf dem Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : 1+z^n \neq 0\}$. Ferner setzen wir $w := e^{i\frac{\pi}{n}}$ und betrachten für jedes $R > 1$ die Wege

$$\gamma_{1,R}(t) := t, \quad t \in [0, R], \quad \gamma_{2,R}(t) := Re^{it}, \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right], \quad \gamma_{3,R}(t) := tw^2, \quad t \in [0, R].$$

a) Zeigen Sie $\text{res}(f; w) = n^{-1}w^{-(n-1)}$.

b) Zeigen Sie

$$\int_{\gamma_{2,R}} f(z) \, dz \longrightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

c) Für $R > 1$ betrachten wir den einfach geschlossenen Weg $\gamma_R := \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,R}^-$. Wenden Sie den Residuensatz auf $\int_{\gamma_R} f(z) \, dz$ an und führen Sie den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ durch. Folgern Sie

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} \, dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

Aufgabe 78 (Tutorium)

a) Für zwei Polynome $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$ in zwei Variablen und mit komplexwertigen Koeffizienten betrachten wir die gebrochenrationale Funktion $R := \frac{P}{Q}$. Ferner nehmen wir an, dass $Q(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$ gilt, und definieren die Funktion

$$h: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = R(\cos(t), \sin(t)).$$

Sei außerdem

$$f: \mathbb{C} \setminus (H_f \cup P_f) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right)\right),$$

wobei H_f die Menge der hebbaren Singularitäten und P_f die Menge der Polstellen von f bezeichnen. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} h(t) \, dt = 2\pi \sum_{z \in N} \text{res}(f; z),$$

wobei $N := P_f \cap U_1(0)$ die Menge der in $U_1(0)$ liegenden Polstellen ist.

b) Sei $a > 1$. Zeigen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin(t)} \, dt = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Aufgabe 79 (Übung)

a) Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass für jedes $r > 0$ die Gleichung $e^{\frac{1}{z}} = w$ unendlich viele Lösungen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq r$ besitzt.

b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{U_1(0)} \subseteq G$. Beweisen Sie: Ist $f \in \mathcal{H}(G)$ und $|f|$ konstant auf $\partial U_1(0)$, f jedoch nicht konstant auf G , so besitzt f mindestens eine Nullstelle in G .

c) Berechnen Sie alle Logarithmen von $i - 1$ sowie alle zwölften Wurzeln von 1.

Aufgabe 80 (Tutorium)

- a) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f, g, h \in \mathcal{H}(U_1(0) \setminus \{0\})$ den Typ der isolierten Singularität $z_0 := 0$:

$$(i) f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2}, \quad (ii) g(z) = \frac{z^2}{\cos(z) - 1}, \quad (iii) h(z) = e^{\cos(z^{-1})}.$$

- b) Bestimmen Sie jeweils das Maximum und das Minimum des Betrages der folgenden Funktionen auf der Menge $\overline{U_1(0)}$.

$$(i) f_1(z) = e^{z^2}, \quad (ii) f_2(z) = z^2 + iz + 1, \quad (iii) f_3(z) = 3 - |z|^2.$$