Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Yonas Mesfun

SS 2020
16.07.2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 75 (Übung)

a) Beweisen Sie: Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und hat $f \in \mathcal{H}(D\backslash\{z_0\})$ in $z_0 \in D$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\operatorname{res}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z),$$

wobei $g(z) := (z - z_0)^m f(z)$ für $z \in D\backslash\{z_0\}$.

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{(e^z - 1)(z-1)^2} \,\mathrm{d}z$$

für den einfach geschlossenen Weg $\gamma(t) := 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Lösungsvorschlag:

a) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(D\backslash\{z_0\})$ habe in $z_0 \in D$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Da D offen ist, existiert ein $R > 0$, sodass $U_R(z_0) \subseteq D$ gilt. Nach Satz 22.16 wird f in $\dot{U}_R(z_0)$ in eindeutiger Weise durch seine Laurentreihe dargestellt, d.h., es existiert eine eindeutige Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$, sodass

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{für alle } z \in \dot{U}_R(z_0).$$

Da f in z_0 einen Pol der Ordnung m hat, folgt weiter aus Satz 22.16, dass $a_k = 0$ für alle $k < -m$ ist. Daher gilt tatsächlich

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{für alle } z \in \dot{U}_R(z_0)$$

und damit

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+m} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z - z_0)^k \qquad \text{für alle } z \in \dot{U}_R(z_0).$$

Leiten wir obige Gleichung $m-1$-mal ab, erhalten wir (man beachte, dass gliedweises Differenzieren von Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius erlaubt ist)

$$\begin{aligned}
g^{(m-1)}(z) = & \sum_{k=m-1}^{\infty} \frac{k!}{(k-(m-1))!} a_{k-m}(z-z_0)^{k-m+1} \\
= & (m-1)!\, a_{-1} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{(k-(m-1))!} a_{k-m}(z-z_0)^{k-m+1} \\
= & (m-1)!\, a_{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+m-1)!}{k!} a_{k-1}(z-z_0)^{k}.
\end{aligned}$$

Der zweite Summand konvergiert gegen 0 für $z \to z_0$ (da Potenzreihen stetig sind), sodass

$$\lim_{z\to z_0} g^{(m-1)}(z) = (m-1)!\, a_{-1} = (m-1)!\, \mathrm{res}(f; z_0).$$

Dies impliziert die gewünschte Identität

$$\frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} g^{(m-1)}(z) = \mathrm{res}(f; z_0).$$

b) Wir wollen den Residuensatz (Satz 22.17) anwenden, um das Integral zu berechnen. Sei dazu $D := U_3(0) \subseteq \mathbb{C}$ und

$$f\colon D\backslash\{0,1\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{(e^z-1)(z-1)^2}.$$

Dann ist f holomorph auf D und die Singularitäten $z_0 := 0$ und $z_1 := 1$ von f liegen im „Inneren“ von γ, d.h., es gilt $z_0, z_1 \in \mathrm{int}(\gamma)$. Da γ ein einfach geschlossener und positiv orientierter (stetig differenzierbarer) Weg in D ist, gilt nach dem Residuensatz

$$\int_\gamma \frac{1}{(e^z-1)(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{1}{(e^z-1)(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i(\mathrm{res}(f;0) + \mathrm{res}(f;1)).$$

Die Funktion f hat in $z_0 = 0$ einen Pol der Ordnung 1 und in $z_1 = 1$ einen Pol der Ordnung 2. Nach Aufgabenteil a) ist daher

$$\mathrm{res}(f;0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{e^z-e^0}{z-0}} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z\right)^{-1}\Bigg|_{z=0} \cdot \frac{1}{(0-1)^2} = 1$$

und

$$\mathrm{res}(f;1) = \lim_{z\to 1}((z-1)^2 f(z))' = \lim_{z\to 1} \frac{-e^z}{(e^z-1)^2} = -\frac{e}{(e-1)^2}.$$

Daher erhalten wir

$$\int_\gamma \frac{1}{(e^z-1)(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i(\mathrm{res}(f;0) + \mathrm{res}(f;1)) = 2\pi i\left(1 - \frac{e}{(e-1)^2}\right).$$

Aufgabe 76 (Tutorium)

Für $r > 0$ sei $\gamma_r\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = re^{it}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

$$\text{(i)} \int_{\gamma_4} \frac{ze^{iz}}{z-\pi}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{(ii)} \int_{\gamma_3} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)^2(z+4)}\,\mathrm{d}z,$$

$$\text{(iii)} \int_{\gamma_2} e^{\frac{z}{1-z}}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{(iv)} \int_{\gamma_1} \frac{z}{e^{iz}-1}\,\mathrm{d}z.$$

Lösungsvorschlag:

(i) Sei $f\colon \mathbb{C}\backslash\{\pi\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z-\pi}$. Dann ist f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{\pi\}$ und es gilt $\pi \in \operatorname{int}(\gamma_4)$. Nach dem Residuensatz ist daher

$$\int_{\gamma_4} \frac{ze^{iz}}{z-\pi}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}(f;\pi).$$

Wir sehen sofort, dass f in π einen Pol erster Ordnung hat. Damit ist nach Aufgabe 75 a)

$$\operatorname{res}(f;\pi) = \lim_{z\to\pi}(z-\pi)f(z) = \lim_{z\to\pi} ze^{iz} = \pi e^{i\pi} = -\pi$$

und damit

$$\int_{\gamma_4} \frac{ze^{iz}}{z-\pi}\,\mathrm{d}z = 2\pi i(-\pi) = -2i\pi^2.$$

(ii) Sei $f\colon \mathbb{C}\backslash\{-1,1,-4\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+1)^2(z+4)}$. Dann ist f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{-1,1,-4\}$ und es gilt $-1,1 \in \operatorname{int}(\gamma_3)$, aber $-4 \notin \operatorname{int}(\gamma_3)$! Nach dem Residuensatz ist daher

$$\int_{\gamma_3} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)^2(z+4)}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\left(\operatorname{res}(f;1) + \operatorname{res}(f;-1)\right).$$

Man sieht sofort an der Definition von f, dass f in 1 bzw. -1 einen Pol erster bzw. zweiter Ordnung hat. Nach Aufgabe 75 a) ist daher

$$\operatorname{res}(f;1) = \lim_{z\to1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to1}\frac{e^z}{(z+1)^2(z+4)} = \frac{e}{20},$$

$$\operatorname{res}(f;-1) = \lim_{z\to-1}((z+1)^2f(z))' = \lim_{z\to-1}\frac{e^z(z-1)(z+4)-e^z(2z+3)}{(z-1)^2(z+4)^2} = -\frac{7e^{-1}}{36}.$$

Es folgt

$$\int_{\gamma_3} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)^2(z+4)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\frac{e}{20}-\frac{e^{-1}}{36}\right) = \pi i\left(\frac{e}{10}-\frac{7}{18e}\right).$$

(iii) Sei $f\colon \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$. Dann ist f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ und es gilt $1 \in \operatorname{int}(\gamma_2)$. Nach dem Residuensatz ist daher

$$\int_{\gamma_2} e^{\frac{z}{1-z}}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}(f;1).$$

Die Funktion f hat in 1 eine wesentliche Singularität. Um $\operatorname{res}(f;1)$ bestimmen zu können, bestimmen wir die Laurentreihe von f. Für $z \neq 1$ gilt

$$f(z) = e^{\frac{z}{1-z}} = e^{\frac{(z-1)+1}{1-z}} = e^{-1}e^{-\frac{1}{z-1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-1}}{k!}(z-1)^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-1)^k,$$

wobei $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ durch

$$a_k := \begin{cases} 0 & \text{für } k > 0, \\ \frac{(-1)^k e^{-1}}{(-k)!} & \text{für } k \leq 0 \end{cases}$$

definiert ist. Da $\operatorname{res}(f,1) = a_{-1}$ gilt, folgern wir $\operatorname{res}(f,1) = -e^{-1}$ und damit

$$\int_{\gamma_2} e^{\frac{z}{1-z}} \,\mathrm{d}z = -2\pi i e^{-1}.$$

(iv) Sei $f\colon \mathbb{C}\backslash\{2\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z}{e^{iz}-1}$. Dann ist f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{2\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\}$ und es gilt $\{2\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\}\cap \operatorname{int}(\gamma_4) = \{0\}$, d.h., *nur* die Singularität $z_0 := 0$ liegt im „Inneren" von γ_1. Nach dem Residuensatz ist daher

$$\int_{\gamma_1} \frac{z}{e^{iz}-1}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}(f;0).$$

Die Funktion f hat in 0 eine hebbare Singularität, denn

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \frac{1}{\lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}-1}{z}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^{iz}\big|_{z=0}} = \frac{1}{i} = -i.$$

Insbesondere ist für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die Funktion f auf $\dot{U}_\varepsilon(0)$ beschränkt, sodass nach Satz 22.14 f eine hebbare Singularität in 0 hat. Nach Satz 22.16 gilt also $\operatorname{res}(f;0) = 0$ und damit

$$\int_{\gamma_1} \frac{z}{e^{iz}-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}(f;0) = 0.$$

Aufgabe 77 (Übung)

In dieser Aufgabe wollen wir für $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes bestimmen. Hierzu betrachten wir die holomorphe Funktion $f\colon G\to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ auf dem Gebiet $G := \{z\in\mathbb{C}\colon 1+z^n \neq 0\}$. Ferner setzen wir $w := e^{i\frac{\pi}{n}}$ und betrachten für jedes $R > 1$ die Wege

$$\gamma_{1,R}(t) := t,\ t\in[0,R], \qquad \gamma_{2,R}(t) := Re^{it}, \quad t\in\left[0,\frac{2\pi}{n}\right], \qquad \gamma_{3,R}(t) := tw^2,\ t\in[0,R].$$

a) Zeigen Sie $\operatorname{res}(f;w) = n^{-1}w^{-(n-1)}$.

b) Zeigen Sie

$$\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \longrightarrow 0 \quad (R\to\infty).$$

c) Für $R > 1$ betrachten wir den einfach geschlossenen Weg $\gamma_R := \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,R}^{-}$. Wenden Sie den Residuensatz auf $\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$ an und führen Sie den Grenzübergang $R\to\infty$ durch. Folgern Sie

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

Lösungsvorschlag:

a) Da das Polynom $z \mapsto 1 + z^n$ in w nur eine einfache Nullstelle hat, hat f in w einen Pol der Ordnung 1. Nach Aufgabe 75 a) muss daher

$$\operatorname{res}(f; w) = \lim_{z \to w} (z - w) f(z)$$

sein. Nach der geometrischen Summenformel gilt für $z \in G$

$$(z - w) f(z) = \frac{z - w}{1 + z^n} = \frac{z - w}{z^n - w^n} = \frac{z - w}{(z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}},$$

sodass

$$\operatorname{res}(f; w) = \lim_{z \to w} (z - w) f(z) = \lim_{z \to w} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} w^k w^{n-1-k}} = \frac{1}{n w^{n-1}}.$$

b) Sei $M_R := \sup_{z \in \operatorname{Spur}(\gamma_{2,R})} |f(z)|$. Dann gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$M_R = \sup_{z \in \operatorname{Spur}(\gamma_{2,R})} |f(z)| = \sup_{t \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]} \frac{1}{|R^n e^{int} + 1|} \leq \frac{1}{R^n - 1}$$

Da $L(\gamma_{2,R}) = \frac{2\pi}{n} R$ gilt, erhalten wir aus Satz 22.5

$$\left| \int_{\gamma_{2,R}} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq M_R \cdot L(\gamma_{2,R}) \leq \frac{2\pi}{n} \frac{R}{R^n - 1} \overset{2 \leq n}{\leq} \frac{2\pi}{n} \frac{1}{R - 1} \longrightarrow 0 \qquad (R \to \infty).$$

c) Nach dem Residuensatz gilt

$$\int_{\gamma_R} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}(f; w) \overset{\text{a)}}{=} \frac{2\pi i}{n w^{n-1}} \quad \text{für alle } R > 1. \tag{1}$$

Wir untersuchen nun die linke Seite obiger Gleichung, also $\int_{\gamma_R} f(z) \, \mathrm{d}z$ genauer. Für jedes $R > 1$ ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} f(z) \, \mathrm{d}z &= \int_{\gamma_{1,R}} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_{3,R}^-} f(z) \, \mathrm{d}z \\ &= \int_{\gamma_{1,R}} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} f(z) \, \mathrm{d}z - \int_{\gamma_{3,R}} f(z) \, \mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{2}$$

Da

$$\int_{\gamma_{3,R}} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_0^R \frac{1}{1 + (tw^2)^n} w^2 \, \mathrm{d}t \overset{w^{2n} = 1}{=} w^2 \int_0^R \frac{1}{1 + t^n} \, \mathrm{d}t = w^2 \int_{\gamma_{1,R}} f(z) \, \mathrm{d}z,$$

folgern wir aus (2)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} f(z) \, \mathrm{d}z &= \int_{\gamma_{1,R}} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} f(z) \, \mathrm{d}z - \int_{\gamma_{3,R}} f(z) \, \mathrm{d}z \\ &= (1 - w^2) \int_{\gamma_{1,R}} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} f(z) \, \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Aus Aufgabenteil b) und (1) folgt daher

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}(1-w^2)\int_0^R \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}(1-w^2)\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,\mathrm{d}z\\ &\overset{\text{b)}}{=} \lim_{R\to\infty}(1-w^2)\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{(1)}{=} \frac{2\pi i}{nw^{n-1}}.\end{aligned}$$

Wir folgern

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{2i\pi/n}{(1-w^2)w^{n-1}} = \frac{\pi/n}{w^n(w^{-1}-w^1)/(2i)} \overset{w^n=-1}{=} \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)},$$

wobei wir im letzten Schritt die Eulerformel $\sin(x) = (e^{ix}-e^{-ix})/(2i)$, $x\in\mathbb{R}$, verwendet haben.

Aufgabe 78 (Tutorium)

a) Für zwei Polynome $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$ in zwei Variablen und mit komplexwertigen Koeffizienten betrachten wir die gebrochenrationale Funktion $R := \frac{P}{Q}$. Ferner nehmen wir an, dass $Q(x,y)\neq 0$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2=1$ gilt, und definieren die Funktion

$$h\colon [0,2\pi]\to\mathbb{R},\ h(t) = R(\cos(t),\sin(t)).$$

Sei außerdem

$$f\colon \mathbb{C}\backslash(H_f\cup P_f)\to\mathbb{C},\ f(z) := \frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right),$$

wobei H_f die Menge der hebbaren Singularitäten und P_f die Menge der Polstellen von f bezeichnen. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} h(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\sum_{z\in N}\operatorname{res}(f;z),$$

wobei $N := P_f\cap U_1(0)$ die Menge der in $U_1(0)$ liegenden Polstellen ist.

b) Sei $a>1$. Zeigen Sie

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Lösungsvorschlag:

a) Man macht sich schnell klar, dass $f(z) = \frac{\widetilde{P}(z)}{\widetilde{Q}(z)}$ mit Polynomfunktionen $\widetilde{P}, \widetilde{Q}\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ gilt. Die (endlich vielen) Nullstellen von $\widetilde{Q}$ sind genau die isolierten Singularitäten von f, die entweder hebbare Singularitäten oder Polstellen sind. Damit ist f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash(H_f \cup P_f)$. Sei nun $\gamma(t) := e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\int_\gamma f(z) = 2\pi i \sum_{z\in(H_f\cup P_f)\cap U_1(0)} \operatorname{res}(f;z) = 2\pi i \sum_{z\in P_f\cap U_1(0)} \operatorname{res}(f;z) = 2\pi i \sum_{z\in N} \operatorname{res}(f;z), \tag{3}$$

wobei die zweite Gleichung daher folgt, dass $\operatorname{res}(f;z) = 0$ für alle hebbaren Singularitäten $z \in H_f$ gilt (vgl. Satz 22.16). Für die linke Seite der obigen Gleichung gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} R\left(\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}), \frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})\right) ie^{it}\,\mathrm{d}t \\ = i\int_0^{2\pi} R\left(\cos(t), \sin(t)\right)\,\mathrm{d}t = i\int_0^{2\pi} h(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(man beachte, dass h stetig ist auf Grund der Voraussetzung $Q(x,y) \neq 0$ für $x^2+y^2 = 1$, womit das Integral $\int_0^{2\pi} h(t)\,dt$ wohldefiniert ist). Setzen wir dies in (3) ein und teilen durch i, erhalten wir die gewünschte Identität

$$\int_0^{2\pi} h(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{z\in N} \operatorname{res}(f;z).$$

b) Sei $a > 1$. Wir setzen $P(x,y) := 1$, $Q(x,y) := a+y$ und $R := \frac{P}{Q}$. Sind $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2+y^2 = 1$, so folgt $|y| \leq 1$ und damit $|Q(x,y)| \geq a - |y| \geq a-1 > 0$, also $Q(x,y) \neq 0$. Nach Aufgabenteil a) gilt also

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} h(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{z\in N} \operatorname{res}(f;z),$$

wobei

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{P\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}{Q\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{a+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{az+\frac{1}{2i}\left(z^2-1\right)} =: \frac{1}{\widetilde{Q}(z)}.$$

Nun gilt $\tilde{Q}(z) = 0$ genau dann, wenn $z^2+2iaz-1 = 0$, also $z = z_0 := i(-a+\sqrt{a^2-1})$ oder $z = z_1 := i(-a-\sqrt{a^2-1})$. Man verifiziert schnell, dass nur z_0 in $U_1(0)$ liegt und dass f in z_0 einen Pol erster Ordnung hat, womit nach Aufgabe 75 a)

$$\operatorname{res}(f;z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{\widetilde{Q}(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{\frac{1}{2i}(z-z_0)(z-z_1)} = \frac{2i}{z_0-z_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = 2\pi\operatorname{res}(f;z_0) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Aufgabe 79 (Übung)

a) Sei $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass für jedes $r > 0$ die Gleichung $e^{\frac{1}{z}} = w$ unendlich viele Lösungen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq r$ besitzt.

b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{U_1(0)} \subseteq G$. Beweisen Sie: Ist $f \in \mathcal{H}(G)$ und $|f|$ konstant auf $\partial U_1(0)$, f jedoch nicht konstant auf G, so besitzt f mindestens eine Nullstelle in G.

c) Berechnen Sie alle Logarithmen von $i - 1$ sowie alle zwölften Wurzeln von 1.

Lösungsvorschlag:

a) Seien $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $r > 0$. Nach Satz 22.20 gibt es unendlich viele Lösungen $u \in \mathbb{C}$ der Gleichung $e^u = w$, nämlich

$$u_k = \log(|w|) + i\mathrm{Arg}(w) + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Daher sind $z_k := \frac{1}{u_k} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, Lösungen der Gleichung $e^{1/z} = w$ (hierbei schließen wir den Fall $k = 0$ aus, da dann $u_0 = 0$ ist, falls $w = 1$ ist). Wir müssen nur noch zeigen, dass unendlich viele dieser z_k die Bedingung $|z_k| \leq r$ erfüllen. Da aber

$$|u_k| \geq |\operatorname{Im} u_k| \geq |2k\pi| - |\mathrm{Arg}(w)| \geq 2|k|\pi - \pi = (2|k| - 1)\pi \longrightarrow \infty \qquad (|k| \to \infty),$$

folgern wir

$$|z_k| = \frac{1}{|u_k|} \longrightarrow 0 \qquad (|k| \to \infty).$$

Daher muss es ein $k_0 = k_0(r) \in \mathbb{N}$ geben, sodass $|z_k| \leq r$ für alle $|k| \geq k_0$ gilt. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $|k| \geq k_0$ gilt dann

$$|z_k| \leq r \qquad \text{und} \qquad e^{1/z_k} = w.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{U_1(0)} \subseteq G$. Sei ferner $f \in \mathcal{H}(G)$ und $|f|$ konstant auf $\partial U_1(0)$, f jedoch nicht konstant auf G. Wir müssen nun zeigen, dass f mindestens eine Nullstelle in G besitzt.
Wir beweisen die Aussage per Widerspruch: Dazu nehmen wir an, dass f nullstellenfrei wäre, d.h., $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Dann wäre die Funktion

$$g\colon G \to \mathbb{C},\ g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

holomorph auf G. Daher müsste nach dem Maximumsprinzip (MP)

$$\min_{z \in \overline{U_1(0)}} |f(z)| = \left(\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |g(z)|\right)^{-1} \overset{\text{(MP)}}{=} \left(\max_{z \in \partial U_1(0)} |g(z)|\right)^{-1} = \min_{z \in \partial U_1(0)} |f(z)|. \tag{4}$$

Nach Voraussetzung gilt aber $f(z) = c$ für alle $z \in \partial U_1(0)$ und eine Konstante $c \in \mathbb{C}$. Wir folgern für alle $w \in U_1(0)$

$$|f(w)| \geq \min_{z \in \overline{U_1(0)}} |f(z)| \overset{(4)}{=} \min_{z \in \partial U_1(0)} |f(z)| = |c|. \tag{5}$$

Wenden wir andererseits das Maximumsprinzip auf f an, so folgern für für alle $w \in U_1(0)$, dass

$$|f(w)| \leq \max_{z \in \overline{U_1(0)}} |f(z)| \stackrel{\text{(MP)}}{=} \max_{z \in \partial U_1(0)} |f(z)| = |c|. \tag{6}$$

Aus Gleichungen (5) und (6) erhalten wir, dass

$$|f(w)| = |c| \qquad \text{für alle } w \in \overline{U_1(0)},$$

d.h., $|f|$ ist konstant auf $U_1(0)$. Nach Aufgabe 67 b) muss dann schon f selbst konstant auf $U_1(0)$ sein. Da G ein Gebiet ist, muss nach dem Identitätssatz f auf ganz G konstant sein, im Widerspruch zur Annahme. Folglich muss f eine Nullstelle in G haben.

c) Da $\log(|i-1|) = \log(\sqrt{2})$ und $\operatorname{Arg}(i-1) = \frac{3\pi}{4}$, sind nach Satz 22.20 alle Logarithmen von $i-1$ durch

$$w_k = \sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

gegeben. Alle zwölften Einheitswurzeln sind nach Satz 22.20 durch

$$z_k := \sqrt[12]{1} = e^{i\frac{\operatorname{Arg}(1)+2k\pi}{12}} = e^{i\frac{k\pi}{6}} \qquad k = 0, \ldots, 11.$$

Mit der Eulerformel $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, und den bekannten Werten von $\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$ bzw. $\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)$, $k = 0 \ldots, 11$, ergeben sich hieraus die Wurzeln ± 1, $\pm i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aufgabe 80 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f, g, h \in \mathcal{H}(U_1(0)\backslash\{0\})$ den Typ der isolierten Singularität $z_0 := 0$:

$$\text{(i) } f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2}, \qquad \text{(ii) } g(z) = \frac{z^2}{\cos(z) - 1}, \qquad \text{(iii) } h(z) = e^{\cos(z^{-1})}.$$

b) Bestimmen Sie jeweils das Maximum und das Minimum des Betrages der folgenden Funktionen auf der Menge $\overline{U_1(0)}$.

$$\text{(i) } f_1(z) = e^{z^2}, \qquad \text{(ii) } f_2(z) = z^2 + iz + 1, \qquad \text{(iii) } f_3(z) = 3 - |z|^2.$$

Lösungsvorschlag:

a) (i) Mit Hilfe der Potenzreihendarstellung des sin lässt sich die Laurentreihe von f_1 mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ bestimmen. In der Tat, für $z \neq 0$ gilt

$$f_1(z) = z^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1} = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} z^{2k+1}.$$

Nach Satz 22.16 hat f_1 einen Pol der Ordnung 1.

(ii) Nach der Potenzreihendarstellung des cos gilt für $z \neq 0$

$$g(z) = \frac{z^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-2}} \longrightarrow -2 \qquad (z \to 0).$$

Damit muss für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die Funktion g beschränkt sein auf $\dot{U}_\varepsilon(0)$, sodass nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (Satz 22.14) g eine hebbare Singularität in $z_0 = 0$ hat.

(iii) Wir zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{z \to 0} z^n h(z)$$

nicht existiert. Nach Sätzen 22.14 und 22.15 muss dann h eine wesentliche Singularität in $z_0 = 0$ haben. Sei also $n \in \mathbb{N}_0$. Da $\cos(it) = \cosh(t)$ und $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \geq \frac{1}{2}e^t \geq \frac{1}{2}t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, haben wir

$$|t^n h(it)| = |t|^n e^{\cosh(|t|^{-1})} \geq |t|^n e^{\frac{1}{2}|t|^{-1}} \longrightarrow \infty \qquad (t \to 0),$$

womit $\lim_{z\to 0} z^n h(z)$ nicht existieren kann. Also muss $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität von f sein.

b) (i) Die Funktion f_1 ist holomorph auf $\mathbb{C}$. Nach dem Maximumsprinzip (MP) gilt daher

$$\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_1(z)| \overset{\text{(MP)}}{=} \max_{z \in \partial U_1(0)} |f_1(z)|.$$

Da $f_1(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, können wir das Maximumssprinzip (MP) auf die holomorphe Funktion $g_1 := 1/f_1$ anwenden, sodass wir das „Minimumsprinzip “

$$\min_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_1(z)| = \left(\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |g_1(z)| \right)^{-1} \overset{\text{(MP)}}{=} \left(\max_{z \in \partial U_1(0)} |g_1(z)| \right)^{-1} = \min_{z \in \partial U_1(0)} |f_1(z)|$$

erhalten. Für $z = x + iy \in \partial U_1(0)$ gilt $x^2 + y^2 = 1$, sodass

$$|f_1(z)| = e^{\operatorname{Re} z^2} = e^{x^2 - y^2} = e^{1-2y^2}.$$

Daher ist

$$\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_1(z)| = \max_{z \in \partial U_1(0)} |f_1(z)| = \max_{y \in [-1,1]} e^{1-2y^2} = e,$$

$$\min_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_1(z)| = \min_{z \in \partial U_1(0)} |f_1(z)| = \min_{y \in [-1,1]} e^{1-2y^2} = e^{-1}.$$

(ii) Mit Hilfe der pq-Formel rechnet man schnell nach, dass die Nullstellen von f_2 in $z_0 := i\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ und $z_1 := i\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ liegen. Da $z_0 \in U_1(0)$ gilt, folgt sofort

$$\min_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_2(z)| = 0.$$

Wir wenden uns nun dem Maximum von $|f_2|$ auf $\overline{U_1(0)}$ zu. Da f_2 holomorph auf $\mathbb{C}$ ist, folgt aus dem Maximumsprinzip

$$\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_2(z)| = \max_{z \in \partial U_1(0)} |f_2(z)| = \max_{t \in [0,2\pi]} |f_2(e^{it})| =: \max_{t \in [0,2\pi]} g_2(t), \tag{7}$$

wobei wir $g_2(t) := |f_2(e^{it})|$, $t \in [0, 2\pi]$ definiert haben. Wir berechnen für $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
g_2^2(t) &= |e^{i2t} + ie^{it} + 1|^2 \\
&= [\cos(2t) - \sin(t) + 1]^2 + [\sin(2t) + \cos(t)]^2 \\
&= \left[\cos^2(t) - \sin^2(t) - \sin(t) + 1\right]^2 + [2\sin(t)\cos(t) + \cos(t)]^2 \\
&= \left[2\cos^2(t) - \sin(t)\right]^2 + [2\sin(t) + 1]^2\cos^2(t) \\
&= \left[4\cos^4(t) - 4\cos^2(t)\sin(t) + \sin^2(t)\right] + \left[4\sin^2(t)\cos^2(t) + 4\sin(t)\cos^2(t) + \cos^2(t)\right] \\
&= 4\cos^2(t)\left[\cos^2(t) + \sin^2(t)\right] + 1 = 4\cos^2(t) + 1,
\end{aligned}$$

wobei wir die Eulersche Identität $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, und die Additionstheoreme für den Sinus und Kosinus angewendet haben.
Wir folgern also $g_2(t) = \sqrt{4\cos^2(t) + 1}$, $t \in [0, 2\pi]$. Da $\cos^2([0, 2\pi]) = [0, 1]$ gilt, sehen wir sofort, dass $\sqrt{5}$ das Maximum von g_2 ist (dieses wird in den Punkten $t \in \{0, \pi, 2\pi\}$ angenommen). Aus (7) folgt nun

$$\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_2(z)| = \max_{t \in [0,2\pi]} g_2(t) = \sqrt{5}.$$

(iii) Die Funktion f_3 ist nicht holomorph, da sie reellwertig und nicht konstant ist (vgl. Aufgabe 67 b)). Somit ist das Maximumsprinzip *nicht* anwendbar. Fassen wir jedoch $U_1(0)$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auf, sehen wir, dass f_3 rotationssymmetrisch zum Ursprung ist: Die Funktion $h\colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $h(r) = 3 - r^2$, ist monoton fallend, sodass $\max_{r \in [0,1]} h(r) = h(0) = 3$ und $\min_{r \in [0,1]} h(r) = h(1) = 2$ gilt. Da $f_3(z) = h(|z|)$ für alle $z \in \overline{U_1(0)}$ gilt, erhalten wir daher

$$\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_3(z)| = \max_{z \in \overline{U_1(0)}} h(|z|) = \max_{r \in [0,1]} h(r) = h(0) = 3$$

und genauso

$$\min_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_3(z)| = \min_{z \in \overline{U_1(0)}} h(|z|) = \min_{r \in [0,1]} h(r) = h(1) = 2.$$