

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt

Aufgabe 81 (Übung)

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}f$ der folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= xe^{-|x|}, & \text{b) } f(x) &= \frac{1}{x^2 + 4x + 5}, \\ \text{c) } f(x) &= \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 1}, & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 82 (Übung)

- a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ mit Hilfe des Cauchy-schen Integralsatzes. Betrachten Sie hierfür die holomorphe Funktion $F(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$, $z \in \mathbb{C}$, und für $R > 0$ und $\xi > 0$ den einfach geschlossenen Weg $\gamma_{\xi,R} := \gamma_{1,\xi,R} + \gamma_{2,\xi,R} + \gamma_{3,\xi,R} + \gamma_{4,\xi,R}$, wobei

$$\begin{aligned} \gamma_{1,\xi,R}(t) &:= t, \quad t \in [-R, R], & \gamma_{2,\xi,R}(t) &:= R + it, \quad t \in [0, \xi], \\ \gamma_{3,\xi,R}(t) &:= t + i\xi, \quad t \in [-R, R], & \gamma_{4,\xi,R}(t) &:= -R + i\xi, \quad t \in [0, \xi]. \end{aligned}$$

Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

- (i) Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes, dass für jedes $R > 0$ und $\xi > 0$

$$\int_{-R}^R f(x)e^{-ix\xi} dx = \left(\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_{1,\xi,R}} F(z) dz - \int_{\gamma_{4,\xi,R}} F(z) dz \right) e^{-\frac{1}{2}\xi^2}. \quad (1)$$

- (ii) Zeigen Sie $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{2,\xi,R}} F(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{4,\xi,R}} F(z) dz = 0$ für jedes $\xi > 0$.
(iii) Führen Sie mit Hilfe von b) den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ in (1) durch und folgern Sie

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad \xi > 0.$$

- (iv) Zeigen Sie, dass die Identität in (iii) auch für $\xi \leq 0$ gilt.

- b) Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ mit Hilfe des Satzes von Plancherel.

Hinweis: Man erinnere sich an die Fouriertransformierte von $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 83 (Übung)

In dieser Aufgabe wollen wir die Eigenwerte der Fouriertransformation $\mathcal{F}$ bestimmen, d.h., jene $\lambda \in \mathbb{C}$, für die es eine absolutintegrierbare Funktion $f \neq 0$ gibt mit

$$\hat{f} = \lambda f.$$

- a) Seien f und $\hat{f}$ absolutintegrierbar. Zeigen Sie $\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Inversionsformel.
- b) Seien $\alpha := \sqrt{2\pi}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $\mathcal{F}$. Folgern Sie aus a), dass dann $\lambda \in \{\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha\}$ ist.
- c) Sei wieder $\alpha := \sqrt{2\pi}$. Zeigen Sie, dass $\{\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha\}$ die Menge der Eigenwerte von $\mathcal{F}$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $e^{-\frac{x^2}{2}}, xe^{-\frac{x^2}{2}}, (a + bx^2)e^{-\frac{x^2}{2}}, (cx + dx^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$ für geeignete $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 84 (Übung)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung: Für $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

Wir nehmen an, dass für jedes feste $t > 0$ die Funktionen $\partial_t u(\cdot, t)$, $\partial_x^k u(\cdot, t)$, $k \leq 2$, und u_0 absolutintegrierbar sind¹. Ferner nehmen wir an, dass ∂_t und $\mathcal{F}$ kommutieren, d.h., dass $\mathcal{F}(\partial_t u(\cdot, t))(\xi) = \partial_t \mathcal{F}(u(\cdot, t))(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ gilt.

- a) Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ sei $v_\xi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $v_\xi(t) = \mathcal{F}(u(\cdot, t))(\xi)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation, dass v_ξ folgendes Anfangswertproblem löst:

$$\begin{cases} v'_\xi(t) = -\xi^2 v_\xi(t), & t > 0, \\ v_\xi(0) = \hat{u}_0(0). \end{cases}$$

- b) Bestimmen Sie v_ξ für jedes $\xi \in \mathbb{R}$.
Hinweis: §12, HM I.

- c) Zeigen Sie mit Hilfe von b), dass

$$u(x, t) = (K_t * u_0)(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0,$$

gilt, wobei für $t > 0$

$$K_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

¹Für eine Funktion $w: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und einem festen $t \in [0, \infty)$ bezeichnen wir mit $w(\cdot, t)$ die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto w(x, t)$.