Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Yonas Mesfun

SS 2020
23.07.2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt

Aufgabe 81 (Übung)

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}f$ der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) $f(x) = xe^{-|x|}$, b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+5}$,

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^4+2x^2+1}$, d) $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösungsvorschlag:

Wir vereinbaren die folgende Notation (die wir auch für die anderen Aufgaben dieses Übungsblattes verwenden): Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutintegrierbar, so definieren wir

$$\check{f}(\xi) := \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}f\right)(-\xi) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Man beachte, dass $\widehat{f}(\xi) = 2\pi\check{f}(-\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt. Die Inversionsformel (Satz 23.7) lässt sich dann kompakter aufschreiben: Sind f als auch ihre Fouriertransformierte $\widehat{f}$ absolutintegrierbar, so gilt

$$\check{\widehat{f}}(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin definieren wir für Aufgabenteile a), b) und c) die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = e^{-|x|}.$$

Nach S.169, Vorlesungsmanuskript, ist g absolutintegrierbar und es gilt

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

a) Per Definition von f gilt $f(x) = xg(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiterhin ist f absolutintegierbar (in der Tat: Für $b > 0$ folgt mit partieller Integration

$$\int_0^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^b xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{-x}\right]_0^b + \int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = -(b+1)e^{-b} + 1$$

und daher für $a < 0 < b$

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{|a|} xe^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^b xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 2 - (b+1)e^{-b} - (|a|+1)e^{-|a|} \longrightarrow 2$$

für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$. Damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 2 < \infty,$$

womit f absolutintegrierbar ist.). Nun folgt aus Satz 23.4

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{xg}(\xi) = i\widehat{(-ixg)}(\xi) \overset{23.4}{=} i(\widehat{g})'(\xi) = -\frac{4i\xi}{(1+\xi^2)^2}.$$

b) Es ist

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{(x+2)^2+1} = \frac{1}{2}\widehat{g}(x+2) = \frac{1}{2}(\tau_{-2}\widehat{g})(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

wobei für $b \in \mathbb{R}$ $(\tau_b g)(x) := g(x-b)$ die Translation von g um b bezeichnet. Nun ist $\widehat{g}$ absolutintegierbar, da

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = 2 \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to\infty}} \int_a^b \frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = 2 \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to\infty}} [\arctan(\xi)]_{\xi=a}^{\xi=b} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi < \infty.$$

Daher dürfen wir die Inversionsformel (IF) (vgl. Satz 23.7) auf g anwenden und erhalten zusammen mit Satz 23.4

$$2\widehat{f}(\xi) = \widehat{\tau_{-2}\widehat{g}}(\xi) \overset{23.4}{=} e^{i2\xi} \cdot \widehat{\widehat{g}}(\xi) = 2\pi e^{i2\xi} \cdot \check{\widehat{g}}(-\xi) \overset{\text{(IF)}}{=} 2\pi e^{i2\xi} g(-\xi) = 2\pi e^{i2\xi} e^{-|\xi|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Es folgt

$$\widehat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|+i2\xi}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

c) Es ist

$$f(x) = \frac{x}{x^4+2x^2+1} = \frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{4}\widehat{g}\,'(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Weiter ist wegen

$$|f(x)| = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{|x|}{1+x^2}}_{\le 1} \cdot \widehat{g}(x) \le \frac{1}{2}\widehat{g}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

und der Absolutintegrierbarkeit von $\widehat{g}$ (vgl. Aufgabenteil b)) die Funktion f nach Satz 23.1 absolutintegrierbar. Somit ist nach Satz 23.4 und der Inversionsformel (IF)

$$\widehat{f}(\xi) = -\frac{1}{4}\mathcal{F}\left(\widehat{g}\,'\right)(\xi) \overset{23.4}{=} -\frac{i\xi}{4}\mathcal{F}\left(\widehat{g}\right)(\xi) = -\frac{2\pi i\xi}{4}\check{\widehat{g}}(-\xi) \overset{\text{(IF)}}{=} -\frac{i\pi}{2}\xi e^{-|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Alternativ kann man mit Hilfe von Aufgabenteil a) argumentieren: Ist $f_1(x) := xe^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, die Funktion aus Aufgabenteil a), so gilt $\widehat{f_1}(x) = -4if(x)$ und damit mit der Inversionsformel (IF)

$$\widehat{f}(\xi) = 2\pi\check{f}(-\xi) = \frac{i\pi}{2}\check{\widehat{f_1}}(-\xi) \overset{\text{(IF)}}{=} \frac{i\pi}{2}f_1(-\xi) = -\frac{i\pi}{2}\xi e^{-|\xi|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

d) Man kann die Fouriertransformierte von f direkt mit Hilfe der Definition (und der Eulerschen Formel) nachrechnen. Stattdessen wollen wir aber mit Hilfe von Satz 24.4 die Berechnung der Fouriertransformierten auf eine Funktion h zurückführen, deren Fouriertransformierte wir bereits kennen. Sei hierfür

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir $a := (\frac{\pi}{2})^{-1}$ und $h_a(x) := h(ax)$, so sehen wir, dass $f(x) = \cos(x)h_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Nach Beispiel (2) auf S.170, Vorlesungsmanuskript, Satz 23.4 und der Eulerschen Formel (EF) $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $x \in \mathbb{R}$, ist daher für $\xi \notin \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned} 2\widehat{f}(\xi) &\overset{\text{(EF)}}{=} \widehat{e^{ix}h_a}(\xi) + \widehat{e^{-ix}h_a}(\xi) \overset{23.4}{=} \widehat{h_a}(\xi-1) + \widehat{h_a}(\xi+1) \overset{23.4}{=} \frac{1}{a}\left[\widehat{h}\left(\frac{\xi-1}{a}\right) + \widehat{h}\left(\frac{\xi+1}{a}\right)\right] \\ &\overset{(2)}{=} \frac{1}{a}\left[\frac{2\sin((\xi-1)/a)}{(\xi-1)/a} + \frac{2\sin((\xi+1)/a)}{(\xi+1)/a}\right] = \frac{2\sin((\xi-1)/a)}{\xi-1} + \frac{2\sin((\xi+1)/a)}{(\xi+1)} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{-2\cos(\xi/a)}{\xi-1} + \frac{2\cos(\xi/a)}{(\xi+1)} = \frac{4\cos(\xi/a)}{1-\xi^2} = \frac{4\cos(\pi\xi/2)}{1-\xi^2}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in $(*)$ die Identitäten $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ und $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, benutzt. Für $\xi = 1$ erhält man genauso

$$2\widehat{f}(1) = \widehat{h_a}(0) + \widehat{h_a}(2) = \frac{1}{a}\left[\widehat{h}\,(0) + \widehat{h}\left(\frac{2}{a}\right)\right] \overset{(2)}{=} \frac{1}{a}\,[2+0] = \pi$$

und analog für $\xi = -1$

$$2\widehat{f}(-1) = \pi.$$

(Alternativ kann man z.B. auch $\widehat{f}(\pm 1)$ mit Hilfe der Regel von de L'Hospital bestimmen, da $\widehat{f}$ nach Satz 23.3 stetig ist: Dann erhalten wir

$$2\widehat{f}(1) \overset{23.3}{=} \lim_{\xi\to 1} 2\widehat{f}(\xi) = \lim_{\xi\to 1} \frac{4\cos(\pi\xi/2)}{1-\xi^2} = \lim_{\xi\to 1} \frac{-2\pi\sin(\pi\xi/2)}{-2\xi} = \pi,$$

Analog kann man auch $2\widehat{f}(-1) = \pi$ zeigen.). Insgesamt folgt also

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{2\cos(\pi\xi/2)}{1-\xi^2} & \text{für } |\xi| \neq 1, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \xi = \pm 1. \end{cases}$$

Aufgabe 82 (Übung)

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes. Betrachten Sie hierfür die holomorphe Funktion $F(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$, $z \in \mathbb{C}$, und für $R > 0$ und $\xi > 0$ den einfach geschlossenen Weg $\gamma_{\xi,R} := \gamma_{1,\xi,R} + \gamma_{2,\xi,R} + \gamma_{3,\xi,R}^{-} + \gamma_{4,\xi,R}^{-}$, wobei

$$\gamma_{1,\xi,R}(t) := t,\ t \in [-R, R], \qquad \gamma_{2,\xi,R}(t) := R + it,\ t \in [0, \xi]\,,$$

$$\gamma_{3,\xi,R}(t) := t + i\xi,\ t \in [-R, R], \qquad \gamma_{4,\xi,R}(t) := -R + i\xi,\ t \in [0, \xi]\,.$$

Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

(i) Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes, dass für jedes $R > 0$ und $\xi > 0$

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x = \left(\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_{1,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{4,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z\right) e^{-\frac{1}{2}\xi^2}. \tag{1}$$

(ii) Zeigen Sie $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{4,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für jedes $\xi > 0$.

(iii) Führen Sie mit Hilfe von b) den Grenzübergang $R \to \infty$ in (1) durch und folgern Sie

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \qquad \xi > 0.$$

(iv) Zeigen Sie, dass die Identität in (iii) auch für $\xi \leq 0$ gilt.

b) Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe des Satzes von Plancherel.

Hinweis: Man erinnere sich an die Fouriertransformierte von $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösungsvorschlag:

a) (i) Da F holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, gilt für jedes $R > 0$ und $\xi > 0$

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\gamma_{\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_{1,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{3,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{4,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_{2,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z - \int_{-R}^{R} F(x+i\xi)\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma_{4,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Umstellen obiger Gleichung liefert

$$\int_{-R}^{R} F(x+i\xi)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_{2,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{4,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z. \tag{2}$$

Das Integral auf der linken Seite ist aber

$$\int_{-R}^{R} F(x+i\xi)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2+2ix\xi-\xi^2}{2}}\,\mathrm{d}x = e^{\frac{\xi^2}{2}} \int_{-R}^{R} f(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x,$$

sodass durch Einsetzen in (2) und Multiplikation mit $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ die gewünschte Gleichung

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x = \left(\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_{1,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{4,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z\right) e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

folgt.

(ii) Da $\operatorname{Re}(z) = R$ für alle $z \in \operatorname{Spur}(\gamma_{2,\xi,R})$ gilt, ist

$$M_{2,\xi,R} := \sup_{z\in\operatorname{Spur}(\gamma_{2,\xi,R})} |F(z)| = \sup_{z\in\operatorname{Spur}(\gamma_{2,\xi,R})} e^{-\frac{\operatorname{Re}(z)^2}{2}} = e^{-\frac{R^2}{2}}$$

und damit nach Satz 22.5

$$\left|\int_{\gamma_{2,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}x\right| \overset{22.5}{\leq} M_{2,\xi,R} \cdot L(\gamma_{2,\xi,R}) = e^{-\frac{R^2}{2}} \cdot \xi \longrightarrow 0 \qquad (R \to \infty).$$

Somit ist $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Analog zeigt man $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{4,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(iii) Führen wir den Grenzübergang $R \to \infty$ in (1) durch, erhalten wir unter Anwendung von b)

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \lim_{R\to\infty} \left(\left(\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_{1,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{4,\xi,R}} F(z)\,\mathrm{d}z \right) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \right.$$

$$\overset{\text{b)}}{=} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + 0 - 0 \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

wobei die letzte Gleichung aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\sqrt{2}y)^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}.$$

folgt.

(iv) Die Identität stimmt offensichtlich für $\xi = 0$, da in diesem Fall

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

gilt. Da f gerade ist (d.h., $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), ist $\widehat{f}$ es ebenfalls, denn mit der Substitution $x \mapsto -x$ folgt

$$\widehat{f}(-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{i(-x)\xi}\,\mathrm{d}x \overset{f\text{ gerade}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(\xi)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Also haben wir auch für $\xi < 0$

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) \overset{\text{(iii)}}{=} \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Es folgt $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

b) Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Beispiel (2) auf Seite 170, Vorlesungsmanuskript, gilt dann

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{2\sin(\xi)}{\xi} & \text{für } \xi \neq 0, \\ 2 & \text{für } \xi = 0. \end{cases}$$

Da $\left(\widehat{f}\right)^2$ absolutintegrierbar ist, folgt daher aus dem Satz von Plancherel (Satz 23.9)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \overset{23.9}{=} \frac{2\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = \pi.$$

Da die Funktion $\xi \mapsto \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}$ gerade ist, folgt schließlich

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 83 (Übung)

In dieser Aufgabe wollen wir die Eigenwerte der Fouriertransformation $\mathcal{F}$ bestimmen, d.h., jene $\lambda \in \mathbb{C}$, für die es eine absolutintegrierbare Funktion $f \neq 0$ gibt mit

$$\widehat{f} = \lambda f.$$

a) Seien f und $\hat{f}$ absolutintegierbar. Zeigen Sie $\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Inversionsformel.

b) Seien $\alpha := \sqrt{2\pi}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $\mathcal{F}$. Folgern Sie aus a), dass dann $\lambda \in \{\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha\}$ ist.

c) Sei wieder $\alpha := \sqrt{2\pi}$. Zeigen Sie, dass $\{\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha\}$ die Menge der Eigenwerte von $\mathcal{F}$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $e^{-\frac{x^2}{2}}, xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $(a + bx^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$, $(cx + dx^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$ für geeignete $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag:

Im Folgenden sei stets $\alpha := \sqrt{2\pi}$.

a) Seien f und $\hat{f}$ absolutintegierbar. Nach der Inversionsformel (IF) gilt dann

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = 2\pi \check{\widehat{f}}(-x) \overset{\text{(IF)}}{=} 2\pi f(-x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $\mathcal{F}$. Dann gibt es eine absolutintegrierbare Funktion $f \neq 0$ mit $\widehat{f} = \lambda f$. Wir definieren $f^-(x) := f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Offensichtlich ist dann $(f^-)^- = f$. Aus Aufgabenteil a) folgt daher

$$\lambda^4 f = \mathcal{F}^4(f) = \mathcal{F}^2\left(\widehat{\widehat{f}}\right) \overset{\text{a)}}{=} 2\pi\mathcal{F}^2(f^-) \overset{\text{a)}}{=} (2\pi)^2 \left(f^-\right)^- = \alpha^4 f.$$

Da $f \neq 0$ ist, muss $\lambda^4 = \alpha^4$ sein. Hieraus folgt $\lambda \in \{\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha\}$.

c) Für jedes $\lambda \in \{\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha\}$ müssen wir eine absolutintegrierbare Funktion $f \neq 0$ finden mit $\widehat{f} = \lambda f$ (in diesem Fall nennen wir f eine *Eigenfunktion* zum Eigenwert λ). Wir definieren hierfür $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Offensichtlich ist dann $\varphi \neq 0$. Im Folgenden wollen wir nachweisen, dass für bestimmte Polynome p die Funktionen $x \mapsto p(x)\varphi(x)$ Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\alpha, -i\alpha, -\alpha$ und $i\alpha$ sind. Hierfür stellen wir zunächst fest, dass für jedes Polynom p die Funktion $x \mapsto p(x)\varphi(x)$ absolutintegrierbar ist. In der Tat, da

$$M := \sup_{x \in \mathbb{R}} |p(x)e^{-\frac{x^2}{4}}| < \infty$$

und $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{4}}$ absolutintegrierbar ist, folgt aus Satz 23.1 und der Abschätzung

$$|p(x)\varphi(x)| = |p(x)e^{-\frac{x^2}{4}}|\, e^{-\frac{x^2}{4}} \leq Me^{-\frac{x^2}{4}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

dass $x \mapsto p(x)\varphi(x)$ absolutintegrierbar ist. Somit ist $\mathcal{F}(p\varphi) = \widehat{p\varphi}$ für jedes Polynom p wohldefiniert.
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\widehat{\varphi} = \alpha\varphi \tag{3}$$

gilt (wir haben diese Identität auch in Aufgabe 82 gezeigt). Also ist α ein Eigenwert von $\mathcal{F}$. Weiter ist

$$\widehat{(x\varphi)}(\xi) = \widehat{-\varphi'}(\xi) \overset{23.4}{=} -i\xi\widehat{\varphi}(\xi) \overset{(3)}{=} -i\alpha\xi\varphi(\xi) \tag{4}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Also ist die Funktion $x \mapsto x\varphi(x)$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert $-i\alpha$. Weiter ist für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}((a+bx^2)\varphi) =& a\mathcal{F}(\varphi) + b\mathcal{F}(x^2\varphi) \overset{(3)}{=} \alpha a\varphi + ib\mathcal{F}(-ix(x\varphi)) \overset{23.4}{=} \alpha a\varphi + ib\left(\mathcal{F}(x\varphi)\right)' \\ \overset{(4)}{=}& \alpha a\varphi + ib(-i\alpha x\varphi)' = \alpha a\varphi + \alpha b(\varphi - x^2\varphi) = -\alpha\left[-a-b+bx^2\right]\varphi.\end{aligned}$$

Daher ist $x \mapsto (a+bx^2)\varphi(x)$ genau dann eine Eigenfunktion zum Eigenwert $-\alpha$, wenn $a = -a-b$, also $b = -2a$ ist. Setzen wir z.B. $a = 1$, folgt dann aus obiger Rechnung, dass die Funktion $x \mapsto (1-2x^2)\varphi(x)$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert $-\alpha$ ist. Schließlich ist für $c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}((cx+dx^3)\varphi) &\overset{(4)}{=} -i\alpha cx\varphi + d\mathcal{F}(x^2(x\varphi)) \overset{23.4}{=} -i\alpha cx\varphi - d\left(\mathcal{F}(x\varphi)\right)'' \\ &\overset{(4)}{=} -i\alpha cx\varphi - d(-i\alpha x\varphi)'' = i\alpha\left[-(c+2d)x + dx^3\right]\varphi.\end{aligned}$$

Daher ist $x \mapsto (cx+dx^4)\varphi(x)$ genau dann eine Eigenfunktion zum Eigenwert $i\alpha$, wenn $c = -c-2d$, also $d = -c$. Setzen wir z.B. $c = 1$, folgt dann aus obiger Rechnung, dass die Funktion $x \mapsto (x-x^3)\varphi(x)$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert $i\alpha$ ist. Also haben wir nachgewiesen, dass tatsächlich $\{\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha\}$ die Menge der Eigenwerte von $\mathcal{F}$ ist.

Aufgabe 84 (Übung)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung: Für $u_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $u \colon \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{cases}\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t), & x \in \mathbb{R}, t > 0,\\ u(x,0) = u_0, & x \in \mathbb{R}.\end{cases} \tag{5}$$

Wir nehmen an, dass für jedes feste $t > 0$ die Funktionen $\partial_t u(\cdot,t)$, $\partial_x^k u(\cdot,t)$, $k \le 2$, und u_0 absolutintegrierbar sind[1]. Ferner nehmen wir an, dass ∂_t und $\mathcal{F}$ kommutieren, d.h., dass $\mathcal{F}(\partial_t u(\cdot,t))(\xi) = \partial_t\mathcal{F}(u(\cdot,t))(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ gilt.

a) Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ sei $v_\xi \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $v_\xi(t) = \mathcal{F}(u(\cdot,t))(\xi)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation, dass v_ξ folgendes Anfangswertproblem löst:

$$\begin{cases}v_\xi'(t) = -\xi^2 v_\xi(t), & t > 0,\\ v_\xi(0) = \widehat{u_0}(0).\end{cases}$$

[1] Für eine Funktion $w \colon \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und einem festen $t \in [0,\infty)$ bezeichnen wir mit $w(\cdot,t)$ die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto w(x,t)$.

b) Bestimmen Sie v_ξ für jedes $\xi \in \mathbb{R}$.
Hinweis: §12, HM I.

c) Zeigen Sie mit Hilfe von b), dass

$$u(x,t) = (K_t * u_0)(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0,$$

gilt, wobei für $t > 0$

$$K_t \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Lösungsvorschlag:

a) Mit der Definition von v_ξ und den Voraussetzungen an $u(\cdot, t)$ erhalten wir für jedes feste $t > 0$

$$v_\xi'(t) = \partial_t \mathcal{F}(u(\cdot,t))(\xi) = \mathcal{F}(\partial_t u(\cdot,t))(\xi) \overset{(5)}{=} \mathcal{F}(\partial_x^2 u(\cdot,t))(\xi) \overset{23.4}{=} (i\xi)^2 \mathcal{F}(u(\cdot,t))(\xi) = -\xi^2 v_\xi(t)$$

und für $t = 0$

$$v_\xi(0) = \mathcal{F}(u(\cdot,0))(\xi) = \widehat{u_0}(\xi).$$

Also löst v_ξ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} v_\xi'(t) = -\xi^2 v_\xi(t), & t > 0, \\ v_\xi(0) = \widehat{u_0}(0). \end{cases} \tag{6}$$

b) Die Gleichung (6) ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit Anfangswert. Die eindeutige Lösung ist gegeben durch

$$v_\xi(t) = \widehat{u_0}(\xi) e^{-t\xi^2}, \quad t \geq 0.$$

c) Nach Aufgabenteil b) ist für jedes feste $t > 0$ $\mathcal{F}(u(\cdot,t))(\xi) = v_\xi(t) = \widehat{u_0}(\xi)e^{-t\xi^2}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Da die Fouriertransformation Faltungen in Produkte übersetzt (vgl. Satz 23.5, Vorlesungsmanuskript), sollte daher $u(x,t) = [u_0 * \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2})](x)$ sein. Dies beweisen wir im Folgenden. Sei $t > 0$ beliebig aber fest. Zunächst einmal berechnen wir die inverse Fouriertransformierte von $\xi \mapsto e^{-t\xi^2}$. Dazu stellen wir fest, dass

$$e^{-t\xi^2} = e^{-\frac{(\sqrt{2t}\xi)^2}{2}} = \varphi(\sqrt{2t}\xi),$$

wobei $\varphi(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ die Gaußsche Glockenkurve ist, deren Fouriertransformierte wir nach Aufgabe 82 oder auch S.174, Vorlesungsmanuskript, bereits kennen. Daher ist

$$\widetilde{(e^{-t\xi^2})}(x) = \frac{1}{2\pi}\widehat{e^{-t\xi^2}}(-x) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\varphi(\sqrt{2t}\xi)}(-x) \overset{23.4}{=} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2t}}\sqrt{2\pi}\varphi\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2t}}\right) \overset{82}{=} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} =: K_t(x).$$

Nach Satz 23.5 ist

$$\mathcal{F}\left(K_t * u_0\right)(\xi) \overset{23.5}{=} \widehat{K_t}(\xi) \cdot \widehat{u_0}(\xi) = e^{-t\xi^2}\widehat{u_0}(\xi) \overset{\text{b)}}{=} \mathcal{F}(u(\cdot,t))(\xi),$$

und daher aus der Injektivität der Fouriertransformation

$$K_t * u_0(x) = u(x,t) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

(die Injektivität der Fouriertransformation sieht man folgendermaßen ein: Sind f, g absolutintegrierbar mit $\widehat{f} = \widehat{g}$, so folgt für $h := f - g$, dass $\widehat{h} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0$ und damit nach der Inversionsformel $h = \check{\widehat{h}} = \check{0} = 0$. Aus $h = 0$ folgt aber sofort $f = g$.). Da $t > 0$ beliebig gewählt war, folgt schließlich

$$u(x,t) = (K_t * u_0)(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0.$$

Bemerkungen:

(1) Die Funktion

$$K : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R},\ K(x,t) = K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

wird auch *Fundamentallösung* der Wärmeleitungsgleichung (oder auch *Wärmeleitungskern*) genannt. Sie spielt eine wichtige Rolle für die Lösbarkeit der Wärmeleitungsgleichung: In obiger Aufgabe haben wir (unter gewissen Voraussetzungen) gezeigt, dass, *wenn u* eine Lösung von (5) ist, notwendigerweise $u(x,t) = (K_t * u_0)(x)$ (für $x \in \mathbb{R}, t > 0$) gilt. Umgekehrt kann man zeigen, dass, wenn u_0 z.B. absolutintegierbar und stetig ist,

$$u(x,t) := \begin{cases} (K_t * u_0)(x) & \text{für } t > 0, \\ u_0(x) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

tatsächlich eine Lösung von (5) definiert.

(2) Die Stärke der Fouriertransformation liegt vor allem in der in Satz 23.4 formulierten Regel: Sind f und f' absolutintegierbar, so gilt $\widehat{f'} = i\xi\widehat{f}$, d.h., die Fouriertransformation übersetzt *Differentiation* in *Multiplikation* (mit ξ). So ging die partielle Differentialgleichung (5) in die *gewöhnliche* Differentialgleichung (6) über, die einfacher zu lösen war.