Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösung zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Wir bilden die erweiterte Matrix

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

auf und führen das Eliminationsverfahren nach Gauß durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot -\frac{1}{10} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot(-3) \quad \cdot(-8) \\ + \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot(-3) \quad \cdot(-11) \mid \cdot 5 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{2} & -\frac{17}{2} & -11 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (I|A^{-1})$$

Also ist die Inverse A^{-1} gegeben durch:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{31}{2} & -\frac{17}{2} & -11 \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:
Das gegebene lineare Gleichungssystem entspricht der Gleichung $B\vec{z} = \vec{y}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1+2\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 2 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir stellen die erweiterte Matrix

$$(B|\vec{y}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1+2\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

auf und führen das Eliminationsverfahren nach Gauß durch:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1+2\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \;\Big|\cdot \tfrac{1}{1+\mathrm{i}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})^2}{1^2-(\mathrm{i})^2} = \frac{-2\mathrm{i}}{2} = -\mathrm{i}\right] \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1-2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\Big|\cdot(-1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3+\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 & -1+2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ablesen (vgl. Abschnitt 14.14 der Vorlesung) liefert, dass die eindeutige Lösung des gegeben linearen Gleichungssystems gerade

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} \\ -1+2 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe 3:

Wir stellen die erweiterte Matrix

$$(C_\alpha|\vec{y}_\alpha) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

auf und führen das Eliminationsverfahren nach Gauß durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 1 & 0 & -2+4\alpha & 8-\alpha \\ 0 & 0 & -3+\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 3-2\alpha \\ 1 & 0 & 10 & -4+3\alpha \\ 0 & 0 & -3+\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -4+3\alpha \\ 0 & 1 & -7 & 3-2\alpha \\ 0 & 0 & -3+\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

Hier wird eine Fallunterscheidung notwendig.

- $\alpha \neq 3$:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -4+3\alpha \\ 0 & 1 & -7 & 3-2\alpha \\ 0 & 0 & -3+\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{-3+\alpha} \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -4+3\alpha \\ 0 & 1 & -7 & 3-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} & + \\ + & \\ \cdot 7 & \cdot(-10) \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6+3\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -4-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ablesen (vgl. Abschnitt 14.14 der Vorlesung) liefert, dass die eindeutige Lösung von $C_\alpha\,\vec{x} = \vec{y}_\alpha$ durch

$$
\vec{x} = \begin{pmatrix} 6+3\alpha \\ -4-2\alpha \\ -1 \end{pmatrix}
$$

gegeben ist.

Aus der obigen Rechnung geht auch hervor, dass $\operatorname{rg}(C_\alpha) = 3$ ist (man lasse die letzte Spalte der erweiterten Matrix weg und zähle die Anzahl linear unabhängiger Zeilen). Nach der Dimensionsformel (vgl. Abschnitt 14.16 der Vorlesung) gilt

$$
3 = \dim \operatorname{Bild}(C_\alpha) + \dim \operatorname{Kern}(C_\alpha) = \underbrace{\operatorname{rg}(C_\alpha)}_{=3} + \dim \operatorname{Kern}(C_\alpha),
$$

also ist $\dim \operatorname{Kern}(C_\alpha) = 0$ und $\dim \operatorname{Bild}(C_\alpha) = 3$. Also ist $\operatorname{Kern}(C_\alpha) = \left\{\vec{0}\right\}$ und, nach Abschnitt 14.10 der Vorlesung, $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Bild}(C_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^3$. Damit ist $B_k = \emptyset$ eine Basis von $\operatorname{Kern}(C_\alpha)$ und $B_b = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\}$ (Einheitsvektoren) eine Basis von $\operatorname{Bild}(C_\alpha)$.

- $\alpha = 3$:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ablesen (vgl. Abschnitt 14.14 der Vorlesung) liefert, dass die Lösungsmenge von $C_3\,\vec{x} = \vec{y}_3$ durch

$$
L = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \;:\; s \in \mathbb{R} \right\}
$$

gegeben ist. Ferner ist

$$
\operatorname{Kern}(C_3) = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}
$$

und damit ist etwa

$$
B_k = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}
$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(C_3)$.

Nach Abschnitt 14.13 der Vorlesung, ist $\mathrm{Bild}(C_3)$ der lineare Aufspann der Spalten von C_3. Aus der obigen Rechnung geht auch hervor, dass $\mathrm{rg}(C_\alpha) = 2$ ist (man lasse die letzte Spalte der erweiterten Matrix weg und zähle die Anzahl linear unabhängiger Zeilen). Nach der Dimensionsformel (vgl. Abschnitt 14.16 der Vorlesung) gilt

$$3 = \dim \mathrm{Bild}(C_\alpha) + \underbrace{\dim \mathrm{Kern}(C_\alpha)}_{=1} = \mathrm{rg}(C_\alpha) + 1,$$

also ist $\dim \mathrm{Bild}(C_\alpha) = 2$. Nach Abschnitt 14.13 der Vorlesung, ist das $\mathrm{Bild}(C_3)$ der lineare Aufspann der Spalten von C_3. Sei etwa

$$B_b = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

(erste zwei Spaltenvektoren von C_3). Dann ist $\mathrm{lin}(B_b) \subseteq \mathrm{Bild}(C_3)$. In jedem beliebigen Vektorraum V sind zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ genau dann linear abhängig, wenn ein $\gamma \in \mathbb{K}$ existiert, so dass $v_1 = \gamma v_2$ gilt. Also ist offenbar B_b linear unabhängig und $\dim \mathrm{lin}(B_b) = \dim \mathrm{Bild}(C_3) = 2$. Nach Abschnitt 14.10 der Vorlesung ist also $\mathrm{lin}(B_b) = \mathrm{Bild}(C_3)$. Damit ist B_b eine Basis von $\mathrm{Bild}(C_3)$.

Aufgabe 4:

Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in Zeilenstufenform. Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 4$, für $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$. Ansonsten ist $r = 3$. Nach Abschnitt 14.8 der Vorlesung ($r = n$), sind die Zeilen von A damit linear unabhängig genau dann, wenn $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$ gilt. Sind $\alpha = 10$ und $\beta = 4$, so ist die letzte Matrix bereits die Zeilennormalform von B. Ist $\alpha = 10$ aber $\beta \neq 4$, so ist

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{\beta - 4} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von B. Ist $\alpha \neq 10$, so sei $\kappa = \frac{\beta-4}{\alpha-10}$ und es gilt

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{\alpha-10} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ \cdot 4 \quad \cdot 1 \quad \cdot(-6) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3-6\kappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1+4\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von B.
□

Aufgabe 5:

Wir zeigen vorbereitend, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Nach dem Untervektorraumkriterium aus Abschnitt 14.4 der Vorlesung ist zu zeigen:

- $0 \in U$: dies ist klar.
- Für alle $x, y \in U$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$: Es gilt in der Tat

$$(x+y)_1 + (x+y)_2 - (x+y)_3 - (x+y)_4 = \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)}_{=0} + \underbrace{(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)}_{=0} = 0$$

  sowie

$$(\alpha x)_1 + (\alpha x)_2 - (\alpha x)_3 - (\alpha x)_4 = \alpha \cdot \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)}_{=0} = 0.$$

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} (-3) + 2 - (-3) - 2 &= 0 \quad (u_1) \\ 3 + (-1) - 1 - 1 &= 0 \quad (u_2) \\ -7 + 3 - (-7) - 3 &= 0 \quad (u_3) \end{aligned}$$

und damit $u_1, u_2, u_3 \in U$. Sei nun $x \in \operatorname{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$. Es existieren also $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

Da nach Obigem U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist und $u_1, u_2, u_3 \in U$, liegt auch ihre Linearkombination x in U.

(b) Zuerst zeigen wir, dass die Menge $\{u_1, u_2, u_3\}$ linear unabhängig ist. Dazu schreiben wir die Vektoren u_1, u_2, u_3 als Zeilen der Matrix A und bringen diese auf Zeilenstufenform:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \cdot \frac{3}{7} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{7} & -2 & \frac{16}{7} \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot 7 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -14 & 16 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid -\frac{1}{10} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -7 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 3$. Nach Abschnitt 14.8 der Vorlesung ($r = n$), sind die Zeilen von A damit in der Tat linear unabhängig.

Als nächstes sehen wir ein, dass $\text{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) = U$ ist. Dazu stellen wir fest, dass $U \neq \mathbb{R}^4$, denn

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U.$$

Also ist $\dim U < 4$, denn ansonsten wäre $\dim \mathbb{R}^4 \leq \dim U = 4 < \infty$, $U \subseteq \mathbb{R}^4$ und damit, nach Abschnitt 14.10 der Vorlesung, $U = \mathbb{R}^4$.

Dann ist also $\dim U \leq 3 = \dim \text{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$, $\text{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) \subseteq U$ nach Teilaufgabe (a) und damit, nach Abschnitt 14.10 der Vorlesung, $U = \text{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$.

□

Aufgabe 6:
Um zu zeigen, dass $(M, \circ)$ eine Gruppe ist müssen wir die Eigenschaften aus der Definition einer Gruppe überprüfen. D.h. wir prüfen ob die Menge bzgl. der Verknüpfung abgeschlossen ist und ob die Verknüpfung das Assoziativitätsgesetz erfüllt. Wir prüfen ob das neutrale Element der Verknüpfung in der Menge liegt. Wir prüfen ob es zu jedem Element in M, ein inverses Element in M gibt. Zunächst zur Verknüpfung:

- Zunächst zur Abgeschlossenheit. Damit $\circ$ eine Verknüpfung auf M ist, muss gelten $\circ : M \times M \to M$. Seine also $f, g \in M$, dann sind f, g bijektiv. Es ist zu zeigen, dass $f \circ g$ ebenfalls bijektiv ist. Dies gilt allerdings bereits nach HM1 (leichte Übungsaufgabe).

- Dass Assoziativgesetz gilt für die Verknüpfung $\circ$ für beliebige Abbildungen, also auch für bijektive Abbildungen und muss im Prinzip nicht gesondert nachgewiesen werden. Beachte es ist für $f, g, h : A \to A$,

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h))(x) &= (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) \\ (f \circ (g \circ h))(x) &= f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) \end{aligned}$$

Das neutrale Element bezüglich der Komposition von Funktion ist die Identität id. Es gilt $(f \circ id)(x) = f(id(x)) = f(x)$ und $(id \circ f)(x) = id(f(x)) = f(x)$. Trivialerweise ist die Identiät eine bijektive Abbildung und damit ist $id \in M$. Das Inverse Element zu gegebnen Abbildung $f \in M$ ist die Inverse Abbildung f^{-1}, denn

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = id(x)$$

und analog

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x = id(x)$$

Wir wissen bereits, dass bijektive Abbildung invertierbar sind, damit liegt zu jedem $f \in M$ auch die inverse $f^{-1} \in M$. Es folgt, dass $(M, \circ)$ eine Gruppe ist.