

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 7:

Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U \subseteq \mathbb{R}^5$, die Orthogonalprojektion $P\vec{x}$ von $\vec{x}$ auf U , sowie den Abstand $d(\vec{x}, U) = \min_{\vec{y} \in U} \|\vec{x} - \vec{y}\|$ für

(a) $U = \text{lin}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\})$ und

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

(b) $U = \text{lin}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\})$ und

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8:

Es sei $V = P[-1, 1]$ der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen auf $[a, b]$ und $p_k \in V$ definiert durch

$$p_m(x) = x^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, 1]$ (*Monome*). Ferner seien die Skalarprodukte $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ bzw. $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$ durch

$$(a) \quad \langle p | q \rangle_1 = \int_{-1}^1 \frac{p(y)q(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy \quad \text{bzw.} \quad (b) \quad \langle p | q \rangle_2 = \int_{-1}^1 p(y)q(y) dy$$

für alle $p, q \in V$ erklärt. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ bzw. $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$ auf p_0, p_1, p_2, p_3 an.

Bemerkung: Sie erhalten die s.g. *Tschebyschow-Polynome* bei (a) und (bis auf Normierung) die s.g. *Legendre-Polynome* bei (b).

Aufgabe 9:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt:

$$\text{Bild}(A)^\perp = \text{Kern}(A^*)$$

Hinweis: Für $M \subseteq V$ ist $M^\perp = \{v \in V : (v|w) = 0 \quad \forall w \in M\}$ (*Orthogonalraum* von M).

(b) Gilt $(A\vec{x}|\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, so ist

$$\text{Bild}(A) \perp \text{Kern}(A).$$

Hinweis: Für $M, N \subseteq V$ ist $M \perp N \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in M : \forall \vec{y} \in N : (\vec{x}|\vec{y}) = 0$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 10:

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}.$$

Aufgabe 11:

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B_n(z) = \begin{pmatrix} 1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 7 (a), 8 (a), 9 (a), und 11 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.