Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösung zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 7:

(a) Wir berechnen mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens (vgl. Abschnitt 15.4 der Vorlesung) ein Orthonormalsystem $B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$, welches U erzeugt, wie folgt:

$$\begin{aligned} & & \vec{b}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \\ \vec{c}_2 &= \vec{v}_2 - (\vec{v}_2|\vec{b}_1)\vec{b}_1 & \vec{b}_2 &= \frac{\vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|} \\ \vec{c}_3 &= \vec{v}_3 - (\vec{v}_3|\vec{b}_1)\vec{b}_1 - (\vec{v}_3|\vec{b}_2)\vec{b}_2 & \vec{b}_3 &= \frac{\vec{c}_3}{\|\vec{c}_3\|} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$(\vec{v}_2|\vec{b}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0) = \frac{3}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \vec{c}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\|\vec{c}_2\| = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$(\vec{v}_3|\vec{b}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ (\vec{v}_3|\vec{b}_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \vec{c}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$\|\vec{c}_3\| = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Nach Abschnitt 15.8 der Vorlesung ist die Orthogonalprojektion $P\vec{x}$ gegeben durch:

$$P\vec{x} = (\vec{x}|\vec{b}_1)\vec{b}_1 + (\vec{x}|\vec{b}_2)\vec{b}_2 + (\vec{x}|\vec{b}_3)\vec{b}_3$$

Wir berechnen:

$$(\vec{x}|\vec{b}_1) = \frac{7}{\sqrt{3}}, \qquad (\vec{x}|\vec{b}_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad (\vec{x}|\vec{b}_3) = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Es folgt:

$$P\vec{x} = \frac{7}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{6}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\5\\8\\13\\0\end{pmatrix}$$

Schließlich ist nach Abschnitt 15.8 der Vorlesung:

$$d(\vec{x}, U) = \min_{\vec{y}\in U} = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} - P\vec{x}\|$$

Wir berechnen:

$$\vec{x} - P\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\5\\8\\13\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\15\end{pmatrix}, \qquad \|\vec{x} - P\vec{x}\| = \frac{\sqrt{228}}{3} \approx 5,03$$

(b) Wie in der ersten Teilaufgabe berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}_1\| &= 3 && \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
(\vec{v}_2|\vec{b}_1) &= 3 && \Rightarrow \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
\|\vec{c}_2\| &= \sqrt{7} && \Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
(\vec{v}_3|\vec{b}_1) = 0,\ (\vec{v}_3|\vec{b}_2) &= -\frac{14}{\sqrt{7}} && \Rightarrow \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\|\vec{c}_3\| &= \sqrt{3} && \Rightarrow \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
(\vec{v}_4|\vec{b}_1) = \frac{27}{3} = 9,\ (\vec{v}_4|\vec{b}_2) = 0,\ (\vec{v}_4|\vec{b}_3) = \frac{3}{\sqrt{3}} &= \sqrt{3} && \Rightarrow \vec{c}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\|\vec{c}_4\| &= 0 && \Rightarrow \operatorname{lin}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\} = \operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}
\end{aligned}$$

Für die Orthogonalprojektion $P\vec{x}$ berechnen wir

$$(\vec{x}|\vec{b}_1) = 2,\ (\vec{x}|\vec{b}_2) = -\frac{8}{\sqrt{7}},\ (\vec{x}|\vec{b}_3) = -\sqrt{3}$$

und erhalten

$$P\vec{x} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 34 \\ 73 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Schließlich ist:

$$
\begin{aligned}
\vec{x} - P\vec{x} &= \begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{21}\begin{pmatrix}7\\-3\\34\\73\\24\end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}14\\24\\8\\-10\\18\end{pmatrix}\\
d(\vec{x},U) &= \min_{\vec{y}\in U}\|\vec{x}-\vec{y}\| = \|\vec{x}-P\vec{x}\| = \frac{\sqrt{14^2+24^2+8^2+10^2+18^2}}{21} = \frac{\sqrt{1260}}{21} = \frac{\sqrt{4\cdot 3\cdot 5\cdot 21}}{21} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8:

(a) Wir benutzen die Notation aus dem Abschnitt 15.4 der Vorlesung. Es ist:

$$
\begin{aligned}
\langle p_0|p_0\rangle_1 &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \lim_{b\to-1+}\int_b^0\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \lim_{a\to1-}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\
&\overset{x=-t}{=} \lim_{b\to1-}\int_0^b\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \lim_{a\to1-}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = 2\lim_{a\to1-}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\
&\underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to1-}\int_0^{\arcsin(a)}\frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\mathrm{d}t = 2\lim_{a\to1-}\int_0^{\arcsin(a)}\frac{\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{|\cos(t)|}\mathrm{d}t\\
&= 2\lim_{a\to1-}\int_0^{\arcsin(a)}1\mathrm{d}t = 2\lim_{a\to1-}\arcsin(a) = 2\frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}
$$

Also ist $b_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ für alle $t\in[-1,1]$.

Ferner ist

$$
\langle p_1|b_0\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y.
$$

Wegen $\left|\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ für alle $y\in(-1,1)$ und da das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$ nach obiger Rechnung konvergiert, konvergiert auch das uneigentliche Integral in $\langle p_1|b_0\rangle_1$ nach dem Majorantenkriterium. Da der Integrand punktsymmetrisch ist, gilt $\langle p_1|b_0\rangle_1 = 0$. Des Weiteren ist

$$
\begin{aligned}
\langle p_1|p_1\rangle_1 &= \int_{-1}^{1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \lim_{b\to-1+}\int_b^0\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \lim_{a\to1-}\int_0^a\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\
&\overset{x=-t}{=} 2\lim_{a\to1-}\int_0^a\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to1-}\int_0^{\arcsin(a)}\frac{\sin^2(t)\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{\sqrt{\cos^2(t)}}\mathrm{d}t\\
&= 2\lim_{a\to1-}\int_0^{\arcsin(a)}\sin^2(t)\mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\mathrm{d}t\\
&= [t-\sin(t)\cos(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Also ist $b_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}t$ für alle $t\in[-1,1]$.

Ferner ist

$$\langle p_2|b_0\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle p_1|p_1\rangle_1 = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

und

$$\langle p_2|b_1\rangle_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y.$$

Wie bei $\langle p_1|b_0\rangle_1$ sieht man, dass $\langle p_2|b_1\rangle = 0$ gilt. Für alle $t \in [-1,1]$ gilt also

$$c_2(t) = p_2(t) - \langle p_2|b_0\rangle_1 b_0(t) - \langle p_2|b_1\rangle_1 b_1(t) = t^2 - \frac{1}{2}.$$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned}\langle c_2|c_2\rangle_1 &= \int_{-1}^{1}\frac{\left(y^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \int_{-1}^{1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \langle p_1|p_1\rangle_1 + \frac{1}{4}\langle p_0|p_0\rangle_1 = \int_{-1}^{1}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y &= \lim_{b\to -1+}\int_{b}^{0}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y + \lim_{a\to 1-}\int_{0}^{a}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\ &\overset{x=-t}{=} 2\lim_{a\to 1-}\int_{0}^{a}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to 1-}\int_{0}^{\arcsin(a)}\frac{\sin^4(t)\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{\sqrt{\cos^2(t)}}\mathrm{d}t\\ &= 2\lim_{a\to 1-}\int_{0}^{\arcsin(a)}\sin^4(t)\mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion zu $\sin^4$ lässt sich mit dem *Phönix-aus-der-Asche-Trick* berechnen:

$$\begin{aligned}\int\sin^4(t)\mathrm{d}t &= \int\underbrace{\sin(t)}_{u'(t)}\underbrace{\sin^3(t)}_{v(t)}\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3\int\cos^2(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t\\ &= -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3\int(1-\sin^2(t))\sin^2(t)\mathrm{d}t\\ &= -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3\int\sin^2(t))\mathrm{d}t - 3\int\sin^4(t)\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{3}{2}(t-\sin(t)\cos(t)) - \cos(t)\sin^3(t)\right] - 3\int\sin^4(t)\mathrm{d}t\\ \Rightarrow \int\sin^4(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{3}{8}t - \cos(t)\left(\frac{\sin^3(t)}{4} + \frac{3\sin(t)}{8}\right)\right]\end{aligned}$$

Damit folgt

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(t)\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{8} \text{ und } \langle c_2|c_2\rangle_1 = \frac{\pi}{8}.$$

Also ist $b_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2t^2-1)$ für alle $t \in [-1,1]$.

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
\langle p_3|b_0\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle p_2|b_1\rangle_1 = 0,\\
\langle p_3|b_1\rangle_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \overset{\text{s.o.}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2\pi}\frac{3}{8},\\
\langle p_3|b_2\rangle_1 &= \sqrt{\frac{8}{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y^3(y^2-\frac{1}{2})}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\left(\int_{-1}^{1}\frac{y^5}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\right) = 0,
\end{aligned}$$

da $\int_{-1}^{1}\frac{y^5}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = 0$ wie bei $\langle p_1|b_0\rangle_1$ und $\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\langle p_2|b_1\rangle_1 = 0$. Damit ist für alle $t\in[-1,1]$

$$c_3(t) = p_3(t) - \langle p_3|b_0\rangle_1 b_0(t) - \langle p_3|b_1\rangle_1 b_1(t) - \langle p_3|b_2\rangle_1 b_2(t) = t^3 - \frac{3}{4}t.$$

Es bleibt noch

$$\begin{aligned}
\langle c_3|c_3\rangle_1 &= \int_{-1}^{1}\frac{\left(y^3-\frac{3}{4}y\right)^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\frac{y^6}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y + \frac{9}{16}\int_{-1}^{1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\
&= \int_{-1}^{1}\frac{y^6}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{8}\pi + \frac{9}{16}\cdot\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1}\frac{y^6}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{9}{32}\pi
\end{aligned}$$

zu berechnen. Wie bei $\langle c_2|c_2\rangle_1$ sieht man, dass

$$\int_{-1}^{1}\frac{y^6}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(t)\mathrm{d}t.$$

Wieder liefert der *Phönix-aus-der-Asche-Trick*:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sin(t)}_{u'(t)}\underbrace{\sin^4(t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[\cos(t)\sin^4(t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} + 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\sin^4(t)\mathrm{d}t\\
&= 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(t))\sin^4(t)\mathrm{d}t\\
&\overset{\text{s. o.}}{=} 5\left[\frac{3}{8}t - \cos(t)\left(\frac{\sin^3(t)}{4}+\frac{3\sin(t)}{8}\right)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(t)\mathrm{d}t\\
&= \frac{15}{16}\pi - 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(t)\mathrm{d}t\\
\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(t)\mathrm{d}t &= \frac{5}{32}\pi
\end{aligned}$$

Also ist $\langle c_3|c_3\rangle_1 = \frac{\pi}{32}$ und für alle $t\in[-1,1]$ ist

$$b_3(t) = \sqrt{\frac{32}{\pi}}\left(t^3 - \frac{3}{4}t\right).$$

(b) Wieder mit der Notation aus dem Abschnitt 15.4 der Vorlesung gilt:

$$\langle p_0|p_0\rangle_2 = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}y = 2.$$

Also ist $b_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für alle $t \in [-1,1]$.

Ferner ist
$$\langle p_1 | b_0 \rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} y \,\mathrm{d}y = 0.$$

Des Weiteren ist
$$\langle p_1 | p_1 \rangle_2 = \int_{-1}^{1} y^2 \,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3} \right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{2}{3}.$$

Also ist $b_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t$ für alle $t \in [-1,1]$.

Ferner ist
$$\langle p_2 | b_0 \rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} y^2 \,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \text{und} \qquad \langle p_2 | b_1 \rangle_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} y^3 \,\mathrm{d}y = 0.$$

Also ist
$$c_2(t) = p_2(t) - \langle p_2 | b_0 \rangle_2 \, b_0(t) - \langle p_2 | b_1 \rangle_2 \, b_1(t) = t^2 - \frac{1}{3}$$

für alle $t \in [-1,1]$ und wegen
$$\langle c_2 | c_2 \rangle_2 = \int_{-1}^{1} \left(y^2 - \frac{1}{3} \right)^2 \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} y^4 - \frac{2}{3} y^2 + \frac{1}{9} \mathrm{d}y = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

ist $b_2(t) = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)$ für alle $t \in [-1,1]$.

Schließlich ist
$$\begin{aligned}
\langle p_3 | b_0 \rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} y^3 \mathrm{d}y = 0, \\
\langle p_3 | b_1 \rangle_2 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} y^4 \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{5}, \\
\langle p_3 | b_2 \rangle_2 &= \sqrt{\frac{45}{8}} \int_{-1}^{1} y^3 \left(y^2 - \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{45}{8}} \int_{-1}^{1} y^5 - \frac{1}{3} y^3 \mathrm{d}y = 0
\end{aligned}$$

und damit
$$c_3(t) = p_3(t) - \langle p_3 | b_2 \rangle_2 \, b_2(t) - \langle p_3 | b_1 \rangle_2 \, b_1(t) - \langle p_3 | b_0 \rangle_2 \, b_0(t) = t^3 - \frac{3}{5} t$$

für alle $t \in [-1,1]$. Es bleibt noch
$$\langle c_3 | c_3 \rangle_2 = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right)^2 \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^6 - \frac{6}{5} t^4 + \frac{9}{25} t^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{8}{175}$$

zu berechnen. Also ist $b_3(t) = \sqrt{\frac{175}{8}} \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right)$ für alle $t \in [-1,1]$.

Aufgabe 9:

(a) Wir zeigen zunächst, dass in jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum V für alle $x \in V$
$$\forall y \in V : (x|y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
gilt.

Beweis: $\Rightarrow$: Wähle $y = x$, dann ist $(x|x) = 0$. Das ist nach Eigenschaft (S3) (vgl. Abschnitt 15.1 der Vorlesung) nur für $x = 0$ möglich.

$\Leftarrow$: Sei $y \in V$ beliebig. Es gilt $(0|y) = (y - y|y) = (y|y) - (y|y) = 0$.

$\square$

Nun gilt:

$$
\begin{aligned}
\vec{x} \in \mathrm{Bild}(A)^{\perp} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \vec{z} \in \mathrm{Bild}(A) : (\vec{x}|\vec{z}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{K}^n : (\vec{x}|A\vec{y}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{K}^n : (A^*\vec{x}|\vec{y}) = 0
\end{aligned}
$$

Die letzte Aussage ist nach Obigem äquivalent zu $A^*\vec{x} = 0$. Dies ist wiederum äquivalent zu $x \in \mathrm{Kern}(A^*)$.

$\square$

(b) Seien $\vec{y} \in \mathrm{Kern}(A)$ und $\vec{z} \in \mathrm{Bild}(A)$ beliebig. Es ist $(\vec{z}|\vec{y}) = 0$ zu zeigen. Da $\vec{z} \in \mathrm{Bild}(A)$, existiert ein $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ mit $A\vec{x} = \vec{z}$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(\vec{z}|\vec{y}) &= (A\vec{x}|\vec{y}) = (A\vec{x} + 0|\vec{y}) \overset{\vec{y} \in \mathrm{Kern}(A)}{=} (A\vec{x} + A\vec{y}|\vec{y}) = (A(\vec{x} + \vec{y})|\vec{x} + \vec{y} - \vec{x}) \\
&= (A(\vec{x} + \vec{y})|(\vec{x} + \vec{y})) - (A\vec{x} + A\vec{y}|\vec{x}) \overset{\text{Voraus.}}{=} (A\vec{x} + A\vec{y}|\vec{x}) \overset{\vec{y} \in \mathrm{Kern}(A)}{=} (A\vec{x}|\vec{x}) \overset{\text{Voraus.}}{=} 0
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe 10:

Nach Abschnitt 17.2 der Vorlesung, ändert sich der Wert der Determinante nicht, wenn man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte dazuaddiert. Da nach Abschnitt 17.8 der Vorlesung das Transponieren den Wert der Determinante ebenfalls nicht ändert, gilt die gleiche Regel für Zeilenumformungen. Es folgt:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{array}{l}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}\end{array}
\begin{array}{l} \cdot(-1)\ \cdot(-1)\ \cdot(-1)\ \cdot(-1) \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 34 \\ 0 & 4 & 14 & 34 & 69 \end{vmatrix}
\begin{array}{l} \\ \cdot(-2)\ \cdot(-3)\ \cdot(-4) \\ + \\ + \\ + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 6 & 22 & 53 \end{vmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-3)\ \cdot(-6) \\ + \\ + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 17 \end{vmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(-4) \\ + \end{array}
= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Nach Abschnitt 17.5 der Vorlesung ist die Determinante einer oberen rechten Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Also ist $\det(A) = 1$.

Aufgabe 11:

(a) Mit den Rechenregeln für Determinanten folgt:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}
\begin{array}{l} \cdot(-1)\ \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \\ + \\ \\ \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Nach Abschnitt 17.5 der Vorlesung ist die Determinante einer oberen rechten Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Also ist $\det(A) = -6$.

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Für $n = 1$ gilt:

$$\det(B_1(z)) = \begin{vmatrix} 1 + z^2 \end{vmatrix} = 1 + z^2$$

Für $n = 2$ gilt (vgl. Abschnitt 17.3 der Vorlesung):

$$\det(B_2(z)) = \begin{vmatrix} 1 + z^2 & z \\ z & 1 + z^2 \end{vmatrix} = (1 + z^2)^2 - z^2 = 1 + 2z^2 + z^4 - z^2 = 1 + z^2 + z^4$$

Für alle $n > 2$ gilt nach dem Determinantenentwicklungssatz (vgl. Abschnitt 17.5 der

Vorlesung):

$$
\begin{aligned}
\det(B_n(z)) &= \begin{vmatrix} 1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n} \\
&= (1+z^2) \begin{vmatrix} 1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)} \\
&\quad -z \begin{vmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)} \\
&= (1+z^2)\det(B_{n-1}(z)) \\
&\quad -z^2 \begin{vmatrix} 1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-2)\times(n-2)} \\
&= (1+z^2)\det(B_{n-1}(z)) - z^2\det(B_{n-2}(z))
\end{aligned}
$$

Es ist etwa:

$$
\begin{aligned}
\det(B_3(z)) &= (1+z^2)\det(B_2(z)) - z^2\det(B_1(z)) \\
&= (1+z^2)(1+z^2+z^4) - z^2(1+z^2) = (1+z^2)(1+z^4) \\
&= 1+z^2+z^4+z^6
\end{aligned}
$$

Dies legt die Vermutung

$$
\det(B_n(z)) = \sum_{m=0}^{n} z^{2m}
$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nahe. Diese beweisen wir per Induktion:

IA ($n = 1$, $n = 2$): siehe oben.

IS: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $k \leq n$ gelte die *IH*

$$\det(B_k(z)) = \sum_{m=0}^{k} z^{2m}.$$

O.B.d.A. ist $n \geq 2$ (ansonsten benutze (IA)). Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned}
\det(B_{n+1}(z)) &\overset{\text{s.o.}}{=} (1+z^2)\det(B_n(z)) - z^2\det(B_{n-1}(z)) \\
&\overset{\text{(IH)}}{=} (1+z^2)\sum_{m=0}^{n} z^{2m} - z^2 \sum_{m=0}^{n-1} z^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{n} z^{2m} + z^2 z^{2n} + z^2 \sum_{m=0}^{n-1} z^{2m} - z^2 \sum_{m=0}^{n-1} z^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{n} z^{2m} + z^{2(n+1)} = \sum_{m=0}^{n+1} z^{2m}
\end{aligned}$$

□