Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

SS21
07.05.2021

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 12:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom (vgl. Abschnitt 18.3 der Vorlesung). Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1-ter Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (4-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \\
&= (4-\lambda)(\lambda-1)^2
\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind also $\lambda_1 = 1$ mit Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = 4$ mit Vielfachheit 1. Nach Abschnitt 18.3 der Vorlesung sind λ_1 und λ_2 genau die Eigenwerte von A mit den algebraischen Vielfachheiten $m_a(1) = 2$ und $m_a(4) = 1$.

(b) Nach Abschnitt 18.2 der Vorlesung ist für jeden Eigenwert λ von A der Eigenraum $E_A(\lambda)$ gegeben durch

$$E_A(\lambda) = \operatorname{Kern}(A - \lambda I_3).$$

Wir berechnen diese mit Hilfe des Eliminationsverfahrens nach Gauß und des (-1)-Ergänzungstricks:

- $E_A(1)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \frac{1}{3} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$E_A(1) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $m_g(1) = \dim(E_A(1)) = 1$.

- $E_A(4)$:

$$\begin{pmatrix}-1&3&-1\\1&-3&1\\-2&-3&-2\end{pmatrix} \begin{matrix}+\\ \cdot 2\\ +\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}0&0&0\\1&-3&1\\0&-9&0\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \\ \mid\cdot -\frac{1}{9}\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&-3&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

  Also ist

$$E_A(4) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

  und $m_g(4) = \dim(E_A(4)) = 1$.

(c) Wegen $m_g(1) = 1 < 2 = m_a(1)$, ist A nach Abschnitt 18.6 der Vorlesung nicht diagonalisierbar. Aber A hat eine s.g. *Joran-Normalform* (vgl. Abschnitt 18.8 der Vorlesung). D.h. es ex. eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^3$ mit

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&*\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,$$

wobei $* \in \{0,1\}$. Da A und J ähnlich sind (vgl. Abschnitt 18.4 der Vorlesung) und A nicht diagonalisierbar ist, kann J nicht diagonalisierbar sein. Also ist $* = 1$.

Denken wir uns S als Matrix der Spaltenvektoren

$$S = (\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3)$$

geschrieben. Es gilt

$$S^{-1}AS = J \Rightarrow AS = SJ \Rightarrow A\,\underbrace{S\vec{e}_i}_{=\vec{s}_i} = SJ\vec{e}_i \qquad \forall i \in \{1,2,3\}\,,$$

also $A\vec{s}_1 = 4\vec{s}_1$, $A\vec{s}_2 = \vec{s}_2$ und $A\vec{s}_3 = \vec{s}_2 + \vec{s}_3$. Also ist $\vec{s}_1 \in E_A(4)$, $\vec{s}_2 \in E_A(1)$ und $(A - I_3)\vec{s}_3 = \vec{s}_2$. Wir wählen

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

und lösen das lineare Gleichungssystem $(A - I_3)\vec{s}_3 = \vec{s}_2$:

$$\begin{pmatrix}2&3&-1&-1\\1&0&1&1\\-2&-3&1&1\end{pmatrix} \begin{matrix}+\\ \cdot(-2)\quad\cdot 2\\ +\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}0&3&-3&-3\\1&0&1&1\\0&-3&3&3\end{pmatrix} \begin{matrix}\mid\cdot\frac{1}{3}\\ \\ +\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Ablesen liefert, dass

$$M = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \;:\; \mu \in \mathbb{C}\right\}$$

die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist. Mit $\mu = -1$ lässt sich

$$\vec{s}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

wählen. Es ist dann

$$S = \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom (vgl. Abschnitt 18.3 der Vorlesung). Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) &= \det(B-\lambda I_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -7-\lambda & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} \; + \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -4 & 10 & 5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (3-\lambda) \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \cdot(-1) & + & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 10 & 5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} \end{array} \\
&= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & -5-\lambda & -2 \\ 6 & -12 & 12 & 9-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{2-ter Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (3-\lambda) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \cdot(-1) & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ -4 & -5-\lambda & -2 \\ 6 & 12 & 9-\lambda \end{vmatrix} \end{array} \\
&= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & -5-\lambda & 3+\lambda \\ 6 & 12 & -3-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (3-\lambda)(3+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & -5-\lambda & 1 \\ 6 & 12 & -1 \end{vmatrix} \; + \\
&= (3-\lambda)(3+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & 7-\lambda & 0 \\ 6 & 12 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{3-ter Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (3-\lambda)(-3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)(-3-\lambda)((2-\lambda)(7-\lambda)+4) = (3-\lambda)(-3-\lambda)(\underbrace{\lambda^2-9\lambda+18}_{=(\lambda-3)(\lambda-6)}) \\
&= (3-\lambda)^2(-3-\lambda)(6-\lambda)
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen sind also $\lambda_1 = -3$ mit Vielfachheit 1, $\lambda_2 = 3$ mit Vielfachheit 2 und $\lambda_3 = 6$ mit Vielfachheit 1. Nach Abschnitt 18.3 der Vorlesung sind λ_1, λ_2 und λ_3 genau die Eigenwerte von B mit den algebraischen Vielfachheiten $m_a(-3) = 1$, $m_a(3) = 2$ und $m_a(6) = 1$.

(b) Nach Abschnitt 18.2 der Vorlesung ist für jeden Eigenwert λ von B der Eigenraum $E_B(\lambda)$ gegeben durch

$$E_B(\lambda) = \operatorname{Kern}(B - \lambda I_4).$$

Wir berechnen diese mit Hilfe des Eliminationsverfahrens nach Gauß und des (-1)-Ergänzungstricks:

- $E_B(-3)$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -4 & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 8 & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 11 & -1 & -12 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$E_B(-3) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $m_g(-3) = \dim E_B(-3) = 1$.

- $E_B(3)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -10 & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 2 & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$E_B(3) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $m_g(3) = \dim E_B(3) = 2$.

- $E_B(6)$:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -13 & -2 & 2 \\ -4 & 10 & -1 & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{3} \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 0 & -12 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \mid \cdot -\frac{1}{3} \\ \\ \mid \cdot -\frac{1}{3} \\ \\ \end{array} \\
&\sim
\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{3} \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{2} \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Also ist

$$E_B(6) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

und $m_g(6) = \dim E_B(6) = 1$.

(c) Wegen $m_g(-3) + m_g(3) + m_g(6) = 1 + 2 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$, ist B nach Abschnitt 18.6 der Vorlesung diagonalisierbar. Nach ebendiesem Abschnitt erhält man ein mögliches S indem man die bereits berechneten Eigenvektoren in eine Matrix schreibt:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14:

(a) Sei $B_K = \left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\right\}$ eine ONB des Kern(A) (eine solche existiert nach Abschnitt 15.4 der Vorlesung). Ist $m = n$, so ist Kern$(A) = \mathbb{K}^n$, also $A = 0$. Sei also im Folgenden $0 \leq m < n$. Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Menge $\left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\right\}$ an und erhalten eine ONB

$$B = \left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m, \vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_n\right\}$$

des $\mathbb{K}^n$. Sei $S = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ die Matrix, deren Spalten gerade die Vektoren $\vec{b}_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ sind. Es ist $S^{-1} = S^*$ (vgl. Abschnitt 15.6 der Vorlesung). Definiere $B = S^{-1}AS$. Dann ist $A = SBS^{-1}$. Die Matrizen A und B sind ähnlich.

Bemerkung: B ist die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ bezüglich der Basis B (vgl. Abschnitt 18.4 der Vorlesung).

Welche Gestalt hat B? Es gilt für jede Matrix $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$C_{ij} = (\vec{e}_i|C\vec{e}_j)$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Für die Matrix B gilt also

$$B_{ij} = (\vec{e}_i|B\vec{e}_j) = (\vec{e}_i|S^{-1}AS\vec{e}_j) = (\vec{e}_i|S^*AS\vec{e}_j) = (\underbrace{S\vec{e}_i}_{=\vec{b}_i}|A\underbrace{S\vec{e}_j}_{=\vec{b}_j}) = (\vec{b}_i|A\vec{b}_j)$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Da $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m \in \mathrm{Kern}(A)$, ist $B_{ij} = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Ferner ist nach Aufgabe 6 (b) $\mathrm{Kern}(A) \perp \mathrm{Bild}(A)$. Also ist $B_{ij} = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Damit hat B die folgende Blockgestalt

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right)$$

mit einer Matrix $B' \in \mathbb{K}^{(n-m)\times(n-m)}$. Das charakteristische Polynom von B' ist ein komplexes Polynom vom Grad $n - m > 0$ (vgl. Abschnitt 18.3 der Vorlesung). Als solches hat es nach dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens eine (komplexe) Nullstelle λ (vgl. Abschnitt 5.6 der Vorlesung). Dieses λ ist ein Eigenwert von B'. Nach Abschnitt 18.2 der Vorlesung, existiert also ein Eigenvektor $\vec{y}' \in \mathbb{K}^{n-m} \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ mit $B'\vec{y}' = \lambda\vec{y}'$. Dann ist (wegen der Blockgestalt)

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vec{y}' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ. Betrachte nun

$$\vec{x} = S\vec{y} = \sum_{j=1}^{n-m} y_j \vec{b}_{j+m} \in \mathrm{lin}\left\{\vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_n\right\}.$$

Es gilt

$$A\vec{x} = SBS^{-1}\vec{x} = SBS^{-1}S\vec{y} = SB\vec{y} = \lambda S\vec{y} = \lambda\vec{x},$$

also ist $\vec{x} \neq \vec{0}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Wegen

$$0 = (A\vec{x}|\vec{x}) = (\lambda\vec{x}|\vec{x}) = \lambda\underbrace{(\vec{x}|\vec{x})}_{>0}$$

ist $\lambda = 0$ und damit $\vec{x} \in \mathrm{Kern}(A) = \mathrm{lin}\left(\left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\right\}\right)$. Dies ist ein Widerspruch zu B Basis von $\mathbb{K}^n$. Also muss die Annahme $m < n$ verworfen werden und damit ist $A = 0$.

□

(b) Im Beweis in (a) wird $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nur benutzt, um die Existenz des Eigenwerts λ bzw. des Eigenvektors $\vec{y}'$ sicherzustellen. Für ein Gegenbeispiel bräuchten wir also eine Matrix A, mit nicht-reellen Eigenwerten, die die Bedingung

$$(A\vec{x}|\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

erfüllt. Für $n = 2$ liefert die *Drehmatix*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

das Gewünschte, denn für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i}),$$

womit die Eigenwerte von A genau i und $-$i sind, sowie

$$\left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = -x_2 x_1 + x_1 x_2 = 0$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Für $n > 2$ betrachte man die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Aufgabe 15:

(a) Seien $\vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$. Es gilt:

$$(T\vec{x}|\vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}|\vec{z}) \overset{17.4}{=} \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \overset{17.2}{=} -\det(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) \overset{17.4}{=} -(\vec{z} \times \vec{y}|\vec{x}) \overset{(S1)}{=} (\vec{x}| - T\vec{z}) = (\vec{x}|T^*\vec{z})$$

Also ist $T^* = -T$.

(b) Nach Abschnitt 17.3 der Vorlesung gilt für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$0 = T\vec{x} = \vec{x} \times \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y} \text{ linear abhängig},$$

also ist $\mathrm{Kern}(T) = \mathrm{lin}(\{\vec{y}\})$.

(c) Nach Aufgabe 6 (a) gilt $\mathrm{Bild}(T) = \mathrm{Kern}(T^*)^\perp$. Mit (a) und (b) folgt

$$\mathrm{Bild}(T) = \mathrm{Kern}(T)^\perp = \mathrm{lin}(\{\vec{y}\})^\perp = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{x}|\vec{y}) = 0 \right\}.$$

Aufgabe 16:

(a) Seien

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen „zu Fuß“ nach:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + b_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + b_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{b}(\vec{a}|\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}|\vec{b})
\end{aligned}$$

□

(b) Die Aussage folgt direkt aus (a):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \overset{\text{(a)}}{=} \vec{b}(\vec{a}|\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}|\vec{b}) + \vec{c}(\vec{b}|\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}|\vec{c}) + \vec{a}(\vec{c}|\vec{b}) - \vec{b}(\vec{c}|\vec{a}) = 0$$

□

(c) Es gilt nach Abschnitt 17.13 der Vorlesung:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \,\middle|\, \vec{c} \times \vec{d}\right) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}) \overset{17.2}{=} \det(\vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}, \vec{a}) = (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})|\vec{a})$$

Mit der Graßmann-Identität aus (a) folgt:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} \,\middle|\, \vec{c} \times \vec{d}\right) = (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})|\vec{a}) = (\vec{c}(\vec{b}|\vec{d}) - \vec{d}(\vec{b}|\vec{c})|\vec{a}) = (\vec{a}|\vec{c})(\vec{b}|\vec{d}) - (\vec{a}|\vec{d})(\vec{b}|\vec{c})$$

□