Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

SS21
14.05.2021

Höhere Mathematik II, Musterlösung

4. Übungsblatt

Aufgabe 14:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom (vgl. Abschnitt 18.3 der Vorlesung). Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1-ter Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)((2-\lambda)^2-1) = (2-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)
\end{aligned}$$

Nach Abschnitt 18.3 der Vorlesung ist das Spektrum von A gerade die Nullstellenmenge von χ_A, also

$$\operatorname{spec}(A) = \{1, 2, 3\}.$$

Nach Abschnitt 18.2 der Vorlesung ist für jeden Eigenwert λ von A der Eigenraum $E_A(\lambda)$ gegeben durch

$$E_A(\lambda) = \operatorname{Kern}(A - \lambda I_3).$$

Wir berechnen diese mit Hilfe des Eliminationsverfahrens nach Gauß und des (-1)-Ergänzungstricks:

- $E_A(1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_A(1) = \operatorname{lin}\{\vec{p}_1\}$ mit

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{v}_1 = \frac{\vec{p}_1}{\|\vec{p}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

- $E_A(2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \sqrt{2} \\ + \\ \mid \cdot \sqrt{2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_A(2) = \operatorname{lin}\{\vec{p}_2\}$ mit

$$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{b}_2 = \frac{\vec{p}_2}{\|\vec{p}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $E_A(3)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_A(2) = \operatorname{lin}\{\vec{p}_3\}$ mit

$$\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{v}_3 = \frac{\vec{p}_3}{\|\vec{p}_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Nach Abschnitt 18.7 der Vorlesung sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von symmetrischen Matrizen immer orthogonal zueinander. Die normierten Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ bilden deshalb die orthogonale Matrix

$$S = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$A = SDS^T \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Definiere

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

sowie $W = SD'S^T$. Dann ist in der Tat

$$W^2 = (SD'S^T)^2 = SD'\underbrace{S^TS}_{=I_3}D'S^T = SD'D'S^T = S(D')^2S^T = SDS^T = A.$$

Ausrechnen liefert:

$$W = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+2\sqrt{2}+\sqrt{3} & -1+2\sqrt{2}-\sqrt{3} & \sqrt{6}-\sqrt{2} \\ -1+2\sqrt{2}-\sqrt{3} & 1+2\sqrt{2}+\sqrt{3} & \sqrt{2}-\sqrt{6} \\ \sqrt{6}-\sqrt{2} & \sqrt{2}-\sqrt{6} & 2+2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15:

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom (vgl. Abschnitt 18.3 der Vorlesung). Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) &= \det(B-\lambda I_4) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{4-ten Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3-ten Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 4-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (4-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3(3-\lambda-3) = -\lambda(4-\lambda)^3
\end{aligned}$$

Nach Abschnitt 18.3 der Vorlesung ist das Spektrum von B gerade die Nullstellenmenge von χ_B, also

$$\operatorname{spec}(B) = \{0, 4\}\,.$$

Nach Abschnitt 18.2 der Vorlesung ist für jeden Eigenwert λ von B der Eigenraum $E_B(\lambda)$ gegeben durch

$$E_B(\lambda) = \operatorname{Kern}(B - \lambda I_4).$$

Wir berechnen diese mit Hilfe des Eliminationsverfahrens nach Gauß und des (-1)-Ergänzungstricks:

- $E_B(0)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_B(0) = \operatorname{lin}\{\vec{p}_1\}$ mit

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } \vec{b}_1 = \frac{\vec{p}_1}{\|\vec{p}_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- $E_B(4)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_B(4) = \operatorname{lin}\{\vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4\}$ mit

$$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Setze

$$\vec{p}_2 = \vec{q}_2, \quad \vec{p}_3 = \vec{q}_4 - \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_4 = \vec{q}_4.$$

Dann ist auch $E_B(4) = \operatorname{lin}\{\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4\}$.

Nach Abschnitt 18.7 der Vorlesung sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von symmetrischen Matrizen immer orthogonal zueinander. Wir brauchen also nur den berechneten Erzeuger $\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ von $E_B(4)$ dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren zu unterziehen:

Die ersten beiden Vektoren sind bereits orthogonal und müssen nur noch normiert werden:

$$\vec{b}_2 = \frac{\vec{p}_2}{\|\vec{p}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_3 = \frac{\vec{p}_3}{\|\vec{p}_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ferner berechnet man

$$\vec{b}_4 = \vec{p}_4 - \underbrace{(\vec{p}_4|\vec{b}_2)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\vec{b}_2 - \underbrace{(\vec{p}_4|\vec{b}_3)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } \left\|\vec{b}_4\right\| = 1.$$

Mit der orthogonalen Matrix

$$T = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

gilt dann

$$B = TDT^T$$

nach Abschnitt 18.7 der Vorlesung.

(b) Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$B^k = (TDT^T)^k = TD\underbrace{T^{-1}T}_{=I_4}DT^{-1} \cdots TDT^{-1} = TD^kT^T$$

Wegen $D^k = 4^{k-1}D$ folgt:

$$B^k = T4^{k-1}DT^T = 4^{k-1}TDT^T = 4^{k-1}B$$

Aufgabe 16:

Wir versuchen die Eigenwerte der Matrix A_α abzuschätzen. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \chi_{A_\alpha}(\lambda) &= \det(A_\alpha - I_3\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} (1-\lambda)(8-\lambda)(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - \alpha^2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((8-\lambda)(1-\lambda) - (4+\alpha^2)) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 4 - \alpha^2) \end{aligned}$$

Daraus lesen wir ab, dass $\lambda_1 = 1 \in \operatorname{spec}(A_\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Also ist A_α, nach der Charakterisierung im Abschnitt 18.9 der Vorlesung, nie negativ (semi-) definit. Die zwei anderen Eigenwerte von A_α sind die Nullstellen des Polynoms $\lambda^2 - 9\lambda + 4 - \alpha^2$ und durch die *p*-*q*-Formel gegeben:

$$\lambda_2 = \frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - (4-\alpha^2)} \qquad \lambda_3 = \frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - (4-\alpha^2)}$$

Wegen $\lambda_2 > 0$ bestimmt nur das Vorzeichen von λ_3 die Definitheit von A_α. Ablesen liefert: ist $|\alpha| < 2$, so ist $\lambda_3 > 0$ und damit A_α positiv definit. Ist $|\alpha| = 2$, so ist $\lambda_3 = 0$ und damit A_α positiv semidefinit. Ist schließlich $|\alpha| > 2$, so ist $\lambda_3 < 0$ und damit A_α indefinit.

Aufgabe 17:

- Wir bestimmen die Eigenwerte der Matrix B_β. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\chi_{B_\beta}(\lambda) &= \det(B_\beta - I_3\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2}-\lambda & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2}-\lambda & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ 0 & -\beta+\lambda & \beta-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (\beta-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2}-\lambda & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\beta-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3}-\lambda & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Entw. nach} \\ \text{3-ten Zeile}}}{=} (\beta-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\beta-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (\beta-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\beta-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Entw. nach} \\ \text{2-ten Zeile}}}{=} (\beta-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)
\end{aligned}$$

  Also ist $\operatorname{spec}(B_\beta) = \{\beta, 2, 3\}$. Nach der Charakterisierung der Definitheit im Abschnitt 18.9 der Vorlesung, ist B_β für $\beta < 0$ indefinit, für $\beta = 0$ positiv semidefinit und positiv definit für $\beta > 0$.

- Klar: für $n = 1$ ist C positiv definit. Für $n \geq 2$ betrachte

$$\vec{e}_1^{\,T} C \vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

  sowie

$$(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)^T C (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = (1, -1, 0, \cdots, 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

  Per Definition ist also C indefinit.

Aufgabe 18:

(a) (i) Wegen $\vec{x} \neq \vec{0}$ ist auch $\overline{\vec{x}} \neq \vec{0}$. Ferner gilt:

$$A\overline{\vec{x}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{e}_i a_{ij} \overline{x_j} \overset{A\in\mathbb{R}^{n\times n}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{\vec{e}_i a_{ij} x_j} = \overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{e}_i a_{ij} x_j} = \overline{\lambda\vec{x}} = \overline{\lambda}\cdot\overline{\vec{x}}$$

Also ist in der Tat $\overline{\lambda} \in \operatorname{spec}(A)$ und $\overline{\vec{x}}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

(ii) Ist $\operatorname{Re}\vec{x} = \vec{0}$, so ist $\vec{0} \neq \vec{y} = -\mathrm{i}\vec{x} = \operatorname{Im}\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y} \in E_A(\lambda)$. Ist $\operatorname{Re}\vec{x} \neq \vec{0}$, so wähle $\vec{0} \neq \vec{y} = \operatorname{Re}\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \overline{\vec{x}})$. Da $\lambda = \overline{\lambda}$, folgt mit obigem Aufgabenteil:

$$A\vec{y} = \frac{1}{2}A(\vec{x} + \overline{\vec{x}}) = \frac{1}{2}(\lambda\vec{x} + \overline{\lambda\vec{x}}) = \frac{1}{2}(\lambda\vec{x} + \lambda\overline{\vec{x}}) = \lambda\vec{y}$$

Also ist in der Tat $\vec{y} \in E_A(\lambda)$.

(b) (i) Es ist nach Voraussetzung $AA^T = A^TA = I_n$. Also ist A normal. Damit lässt sich A nach Bemerkung im Abschnitt 18.7 der Vorlesung orthogonal diagonalisieren. Da $\lambda \neq \overline{\lambda}$ ist $E_A(\lambda) \perp E_A(\overline{\lambda})$, also

$$\begin{aligned} 0 = (\vec{x}|\overline{\vec{x}}) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 &= \sum_{j=1}^{n} \left[(\operatorname{Re}(x_j))^2 - (\operatorname{Im}(x_j))^2 + 2\mathrm{i}\operatorname{Re}(x_j)\operatorname{Im}(x_j)\right] \\ &= \|\vec{x}_1\|^2 - \|\vec{x}_2\|^2 + 2\mathrm{i}(\vec{x}_1|\vec{x}_2) \end{aligned}$$

Also gilt $\|\vec{x}_1\|^2 = \|\vec{x}_2\|^2$ und $(\vec{x}_1|\vec{x}_2) = 0$. Wegen $\vec{x} \neq 0$ muss auch $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \neq 0$ gelten.

(ii) Zunächst ist wegen

$$0 \neq \|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}|\vec{x}) \overset{A\text{ orth.}}{=} (A\vec{x}|A\vec{x}) = (\lambda\vec{x}|\lambda\vec{x}) = |\lambda|^2\|\vec{x}\|^2$$

$|\lambda| = 1$. Es existiert also ein $\varphi \in (-\pi, \pi)$ mit $\lambda = e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$ (Polarkoordinatendarstellung).

Es gilt

$$\begin{aligned} A\vec{x}_1 &= \frac{1}{2}A(\vec{x} + \overline{\vec{x}}) = \frac{1}{2}(\lambda\vec{x} + \overline{\lambda\vec{x}}) \\ &= \frac{1}{2}((\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))(\vec{x}_1 + \mathrm{i}\vec{x}_2) + (\cos(\varphi) - \mathrm{i}\sin(\varphi))(\vec{x}_1 - \mathrm{i}\vec{x}_2)) \\ &= \cos(\varphi)\vec{x}_1 - \sin(\varphi)\vec{x}_2 \in U, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} A\vec{x}_2 &= \frac{1}{2\mathrm{i}}A(\vec{x} - \overline{\vec{x}}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\lambda\vec{x} - \overline{\lambda\vec{x}}) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}((\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))(\vec{x}_1 + \mathrm{i}\vec{x}_2) - (\cos(\varphi) - \mathrm{i}\sin(\varphi))(\vec{x}_1 - \mathrm{i}\vec{x}_2)) \\ &= \cos(\varphi)\vec{x}_2 + \sin(\varphi)\vec{x}_1 \in U. \end{aligned}$$

Damit ist in der Tat $A(U) \subseteq U$. Die lineare Abbildung $\vec{y} \mapsto A\vec{y}$ für $\vec{y} \in U$ ist eine Drehung um den Winkel $-\varphi$.

Aufgabe 19:

(a) Gelte nach Voraussetzung etwa $A = SD_1S^{-1}$ bzw. $B = SD_2S^{-1}$ Diagonalmatrizen $D_1, D_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Es folgt:

$$AB = SD_1\underbrace{S^{-1}S}_{I_n}D_2S^{-1} = SD_1D_2S^{-1} = SD_2D_1S^{-1} = SD_1\underbrace{S^{-1}S}_{I_n}D_2S^{-1} = BA$$

□

(b) Nach Abschnitt 18.3 der Vorlesung gilt für jedes $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$$

Nach Voraussetzung ist also $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 1$ für jedes $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$. Nach Abschnitt 18.6 der Vorlesung ist also A diagonalisierbar. Seien etwa $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ linear unabhängige Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A. Wegen $m_g(\lambda_j) = 1$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, ist $E_A(\lambda_j) = \operatorname{lin}\left\{\vec{b}_j\right\}$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Mit der Voraussetzung der Vertauschbarkeit folgt

$$AB\vec{b}_j = BA\vec{b}_j = \lambda_j B\vec{b}_j,$$

also $B\vec{b}_j \in E_A(\lambda_j)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Wegen $\dim(E_A(\lambda_j)) = m_g(\lambda_j) = 1$, existiert ein $\mu_j \in \mathbb{C}$ mit $B\vec{b}_j = \mu_j \vec{b}_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Damit ist $\operatorname{spec}(B) = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ mit den Eigenvektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$. Mit $S = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ haben sowohl $S^{-1}AS$, als auch $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt.

□