

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 23:

Die Funktionen f , g und h sind für $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \quad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \quad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

gegeben und es sei $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie:

- (a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
- (b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d.h. für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \rightarrow g(0,0)$ für $r \rightarrow 0+$.
- (c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x,y) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x,y)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

Aufgabe 24:

Die Kurve $\gamma : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

gegeben. Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und ggf. ihre Parameterisierung nach Bogenlänge.

Aufgabe 25:

Die Kurve $\eta : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \quad \forall t \in (-1,1)$$

gegeben. Ist η eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\eta)$ und ggf. ihre Parameterisierung nach Bogenlänge.

Aufgabe 26:

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

- (a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (xy^2z^3e^{xy^2z^3}, x^2e^y + \sin(x))$
- (b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = (ye^x + x \sinh(y), y^4 + 3x^2 \sin(y), 4y - x^3)$
- (c) $h : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos(\varphi) \cos(\vartheta), r \sin(\varphi) \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta))$

Aufgabe 27:

Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

- (a) Zeigen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.
- (b) Berechnen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von g .
- (c) Sind die partiellen Ableitungen von g im Punkt $(0, 0)$ stetig?
- (d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0) = (\nabla g(0, 0)) \cdot \vec{v}$?

Aufgabe 28:

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x)) \sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

- (a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (0, \frac{\pi}{4})$ und eine offene Menge $V \ni (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ gibt, so dass f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.
- (b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, aber dass $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 25, 26 und 28 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.