Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

SS21
1.06.2021

Höhere Mathematik II, Musterlösung

5. Übungsblatt

Aufgabe 23:

(a) Klar: f ist stetig in jedem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen.
Sei $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) \to (0,0)$ und $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$|f(x_k, y_k)| = \left| \frac{x_k y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \right| \overset{\text{A.-G.-Mittel}}{\leq} |y_k| \frac{x_k^2 + y_k^2}{2(x_k^2 + y_k^2)} = \frac{|y_k|}{2} \to 0 = f(0,0)$$

für $k \to \infty$. Damit ist f stetig in $(0,0)$.

(b) Die Funktion g ist unstetig in $(0,0)$, denn $(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$, aber

$$g\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2} \not\to 0 = g(0,0)$$

für $k \to \infty$.

Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ beliebig. Angenommen, $\cos(\varphi) = 0$. Dann ist $\sin(\varphi) \neq 0$ und

$$g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \frac{r^3 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi) + r^4 \sin^4(\varphi)} = 0 \to 0 = g(0,0)$$

für $r \to 0+$. Ist $\cos(\varphi) \neq 0$, so ist trotzdem

$$g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \frac{r^3 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi) + r^4 \sin^4(\varphi)} = r\frac{\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi) + r^2\sin^4(\varphi)} \to 0 = g(0,0)$$

für $r \to 0+$.

(c) Die Funktion h ist unstetig in $(0,0)$, denn $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$, aber

$$h\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = 1 \not\to 0 = h(0,0)$$

für $k \to \infty$.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \to \frac{0}{0 + \underbrace{(x-0)^2}_{>0}} = 0$$

für $y \to 0$. Ist $x = 0$, so ist $h(x,y) = 0 \to 0$ für $y \to 0$. Also gilt in der Tat $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y) = h(0,0) = 0$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt auch $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y) = h(0,0) = 0$.

Aufgabe 24:
Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{2}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \frac{4}{\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \neq 0$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Deshalb ist γ regulär. Ferner gilt:

$$\psi(t) := \int_0^t \|\dot{\gamma}(s)\| \, \mathrm{d}s = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} t$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Es ist also $L(\gamma) = \psi(2\pi) = 2\sqrt{\pi^2 + 4}$. Die Parameterisierung nach Weglänge von γ ist durch

$$\gamma \circ \psi^{-1}(s) = \gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{4 + \pi^2}} s\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} s\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} s\right) \\ \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}} s \end{pmatrix}$$

für alle $s \in [0, 2\sqrt{\pi^2 + 4}]$ gegeben.

Aufgabe 25:
Es gilt

$$\dot{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ 1 \\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \|\dot{\eta}(t)\| = \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + 1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0$$

für alle $t \in (-1, 1)$. Deshalb ist η regulär. Ferner gilt:

$$\psi(t) := \int_{-1}^t \|\dot{\eta}(s)\| \, \mathrm{d}s = \sqrt{2} \left(\arcsin(t) - \arcsin(-1)\right) = \sqrt{2} \left(\arcsin(t) + \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $t \in [-1, 1]$. Es ist also $L(\eta) = \psi(1) = \sqrt{2}\pi$. Die Umkehrfunktion $\psi^{-1} : [0, \sqrt{2}\pi]$ ist durch

$$\psi^{-1}(s) = \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

für alle $s \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben. Die Parameterisierung nach Weglänge von η ist dann durch

$$\eta \circ \psi^{-1}(s) = \eta\left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \\ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}$$

für alle $s \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben.

Aufgabe 26:

(a) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= ((1 + xy^2z^3)y^2z^3e^{xy^2z^3}, 2xe^y + \cos(x)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= (2xyz^3(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, x^2e^y) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= (3xy^2z^2(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, 0) \end{aligned}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= (ye^x + \sinh(y), 6x\sin(y), -3x^2) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (e^x + x\cosh(y), 4y^3 + 3x^2\cos(y), 4)
\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial r}(r,\varphi,\vartheta) &= (\cos(\varphi)\cos(\vartheta), \sin(\varphi)\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)) \\
\frac{\partial h}{\partial \varphi}(r,\varphi,\vartheta) &= (-r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) \\
\frac{\partial h}{\partial \vartheta}(r,\varphi,\vartheta) &= (-r\cos(\varphi)\sin(\vartheta), -r\sin(\varphi)\sin(\vartheta), r\cos(\vartheta))
\end{aligned}$$

für alle $(r, \varphi, \vartheta) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 27:
Wir berechnen vorbereitend für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(y)}{1+x^2} & (2+\arctan(x))\cos(y) \\ -e^x\cos(y) & e^x\sin(y) \end{pmatrix}$$

(a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes aus Abschnitt 19.14 der Vorlesung sicher. Es ist in der Tat

$$f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} (2+\arctan(0))\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -e^0\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \mid \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

Also ist $f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$

$$(f^{-1})'\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (f^{-1})'\left(f\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(f'(x,y)) = \frac{\sin^2(y)e^x}{1+x^2} + e^x(2+\arctan(x))\cos^2(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wegen $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ werden die $\sin^2$ bzw. $\cos^2$-Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist $\det(f'(x,y)) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. f ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$f(x, y+2\pi) = \begin{pmatrix} (2+\arctan(x))\sin(y+2\pi) \\ -e^x\cos(y+2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\arctan(x))\sin(y) \\ -e^x\cos(y) \end{pmatrix} = f(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist f nicht injektiv.

Aufgabe 28:

Wir berechnen vorbereitend für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(x)\cos(y) & -\cosh(x)\sin(y) \\ \cosh(x)\sin(x) & \sinh(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

(a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes aus Abschnitt 19.14 der Vorlesung sicher. Es ist in der Tat

$$g\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cosh(\log(2))\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sinh(\log(2))\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$g'\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot \frac{4}{5} \\ | \cdot (-\frac{4}{5}) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $g'\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $g^{-1} : V \to U$

$$(g^{-1})'\left(0, \frac{3}{4}\right) = (g^{-1})'\left(g\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[g'\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(g'(x,y)) = \sinh^2(x)\cos^2(y) + \cosh^2(x)\sin^2(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wegen $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ werden die $\sin^2$ bzw. $\cos^2$-Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist $\det(g'(x,y)) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. g ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$g(x, y+2\pi) = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y+2\pi) \\ \sinh(x)\sin(y+2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix} = g(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist g nicht injektiv.