

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 29:

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

- (a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.
- (b) Berechnen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von f .
- (c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$ stetig?
- (d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = (\nabla f(0, 0)) \cdot \vec{v}$?

Aufgabe 30:

Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

- (a) Zeigen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.
- (b) Berechnen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von g .
- (c) Sind die partiellen Ableitungen von g im Punkt $(0, 0)$ stetig?
- (d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0) = (\nabla g(0, 0)) \cdot \vec{v}$?

Aufgabe 31:

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x)) \sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

- (a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (0, \frac{\pi}{4})$ und eine offene Menge $V \ni (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.
- (b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, aber dass $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 32:

Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, welche durch

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} \cosh(x) \cos(y) \\ \sinh(x) \sin(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

- (a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (\log(2), \frac{\pi}{2})$ und eine offene Menge $V \ni (0, \frac{3}{4})$ gibt, so dass U durch g bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.
- (b) Zeigen Sie, dass g in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, aber dass $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 33:

Betrachten Sie die Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ und $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, sowie

$$f(x, y) = (\log(xy), \cos(x^2 + y), e^x) \quad \text{und} \quad g(x, y, z) = e^x + yz + \log(z)$$

- (a) Berechnen Sie die Ableitungen $\nabla f, \nabla g$.
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $\nabla(g \circ f)$.
- (c) Berechnen Sie die Ableitung $\nabla(g \circ f)$, indem Sie $g \circ f$ explizit berechnen und dann ableiten.

Aufgabe 34:

Betrachten Sie die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, welche durch

$$f(x, y) = (x^2, y^2), \quad g(x, y) = (\sin(xy), e^{x+y}), \quad h(x, y) = (e^x \cos(y), \sinh(x))$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben sind.

- (a) Berechnen Sie die Ableitungen $\nabla f, \nabla g, \nabla h$.
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $\nabla(g \circ f), \nabla(h \circ g)$.
- (c) Berechnen Sie die Ableitungen $\nabla(g \circ f), \nabla(h \circ g)$, indem Sie $g \circ f$ bzw. $h \circ g$ explizit berechnen und dann ableiten.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 29, 31 und 33 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.