Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

SS21
08.06.2021

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösung zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 44:

(a) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(\vec{x})\cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(e^{\cos(t)\sin(t)},\cos(t)\sin(t))\cdot(-\sin(t),\cos(t))\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2(t)\sin(t)-\sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\mathrm{d}t\\
&= \left[-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{\pi}\sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\mathrm{d}t - \int_\pi^{2\pi}\sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\mathrm{d}t\\
&\overset{t=\tau+\pi}{=} \left[-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{\pi}\sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\mathrm{d}t + \int_0^{\pi}\sin(\tau)e^{\cos(\tau)\sin(\tau)}d\tau = 0
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2x = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$$

für alle $x,y\in\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und f ein C^1-Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 20.4 der Vorlesung, dass f ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab. Es ist

$$\gamma(0)=(0,0),\quad \gamma\left(\frac{19}{4}\pi\right)=(-1,2).$$

Wähle also $\tilde\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ mit $\tilde\gamma(t)=t(-1,2)$. Es gilt:

$$\int_\gamma f(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_{\tilde\gamma} f(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 f(\tilde\gamma(t))\cdot\dot{\tilde\gamma}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 4t^2+10t^2\mathrm{d}t = 14\int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{8}{3}[t^3]_{t=0}^{t=1} = \frac{14}{3}$$

Aufgabe 45:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) &= -15y^2ze^{-xz} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)\\
\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) &= (-3x^2-5y^3+x^3z+5xy^3z)e^{-xz} = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z)\\
\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) &= -15xy^2 = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z)
\end{aligned}$$

für alle $x,y,z\in\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend und f ein C^1-Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 20.4 der Vorlesung, dass f ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab. Es ist

$$\gamma(0)=(0,0,0),\quad \gamma(1)=(1,0,0).$$

Wähle also $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{\gamma}(t) = (t,0,0)$. Es gilt:

$$\int_\gamma f(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\tilde{\gamma}} f(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 f(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_{t=0}^{t=1} = 1$$

(b) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^{\log(2)} f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\log(2)} (\cosh(t), -\sinh(t), \sinh(t)) \cdot (\cosh(t), \sinh(t), \cosh(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\log(2)} \cosh^2(t) - \sinh^2(t) + \sinh(t)\cosh(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\log(2)} 1 + \sinh(t)\cosh(t)\mathrm{d}t = \log(2) + \frac{1}{2}\left[\sinh^2(t)\right]_{t=0}^{t=\log(2)} = \log(2) + \frac{9}{32}
\end{aligned}$$

Aufgabe 46:

(a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left[\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x \\
&= [\mathrm{Arsinh}(x)]_{x=0}^{x=1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x \\
&\overset{y=\frac{x}{\sqrt{2}}}{=} \mathrm{Arsinh}(1) - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}y = \mathrm{Arsinh}(1) - [\mathrm{Arsinh}(y)]_{y=0}^{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\
&= \mathrm{Arsinh}(1) - \mathrm{Arsinh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \log\left(1+\sqrt{2}\right) - \log\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}(x,y) &= \int_1^2\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_1^2 \left[\frac{1}{x+y}\right]_{y=3}^{y=4}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x+3}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x+4}\mathrm{d}x \\
&= [\log(x+3)]_{x=1}^{x=2} - [\log(x+4)]_{x=1}^{x=2} = \log\left(\frac{5}{4}\right) - \log\left(\frac{6}{5}\right) = \log\left(\frac{25}{24}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 47:

(a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{x^2}\mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, 0\le y\le x\le 1\}}(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e-1}{2}
\end{aligned}$$

(b) Es ist:

$$\begin{aligned} B &:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\, y\le x\le y^2+1\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ((0\le x\le 1)\vee(x>1))\wedge(0\le y\le 1)\wedge(y\le x\le y^2+1)\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ((0\le y\le x\le 1)\vee((1<x\le 2)\wedge(\sqrt{x-1}<y\le 1))\right\}\\ &= \underbrace{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x\le 1\right\}}_{=B_1}\cup\underbrace{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (1<x\le 2)\wedge(\sqrt{x-1}<y\le 1)\right\}}_{=B_2} \end{aligned}$$

Ferner ist $B_1\cap B_2=\emptyset$. Es folgt mit dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_y^{y^2+1} x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_B x^2y\mathrm{d}(x,y) = \int_{B_1} x^2y\mathrm{d}(x,y) + \int_{B_2} x^2y\mathrm{d}(x,y)\\ &= \int_0^1\int_0^x x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^2\int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^4}{2}\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2\frac{1-(x-1)}{2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{10}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{10}+\frac{8}{3}+\frac{1}{8}-\frac{1}{3}-2=\frac{67}{120} \end{aligned}$$

Aufgabe 48:

a) Um zu zeigen, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld auf G ist verwenden wir die Verträglichkeitsbedingugn (Satz 2 (iv)). Es ist $\vec{v}$ ein C^1 Vektorfeld. Zunächst ist klar, dass $(0,\infty)\times(0,\infty)$ ein Gebiet ist. Wir prüfen also

$$\partial_y v_1 = \partial_y(x+2xy) = 2x = \partial_x(x^2+1) = \partial_x v_2 \quad \text{auf } G$$

und damit ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld.

b) Wir suchen eine Funktion $\Phi : G\to\mathbb{R}$ mit $\nabla\Phi=\vec{v}$. Ein Kandidaten für das Potential bestimmen wir durch integrieren der Komponenten das Potentialfeld. Es ist

$$\begin{aligned} \int v_1(x,y)\mathrm{d}x &= \int x+2xy\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2+x^2y+C_1(y)\\ \int v_1(x,y)\mathrm{d}x &= \int x^2+y\mathrm{d}y = x^2y+\frac{1}{2}y^2+C_2(x) \end{aligned}$$

Wir wählen $C_1(y)=\frac{1}{2}y^2$ und $C_2(x)=\frac{1}{2}x^2$, sodass

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+x^2y$$

und damit $\nabla\Phi=\vec{v}$.

Aufgabe 49:

a) $\mathbb{R}^2$ ist ein ein Sterngebiet und $\vec{v}$ ein C^1 Vektorfeld. Daher ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ genau dann wenn die Verträglichkeitesbdingungen erfüllt sind. Wir bestimmen also

$$\begin{aligned} \partial_y v_1 &= 2xg(xy)+(1+2xy)g'(xy)\\ \partial_x v_2 &= 4xg(xy)+2x^2g'(xy)y \end{aligned}$$

Indem wir beide Ausdrücke gleichsetzen finden wir

$$2xg(xy) + xg'(xy) = 4xg(xy) \Leftrightarrow g'(xy) = 2g(xy)$$

Die Bedingung an g ist efüllt falls $g' = 2g$ was für $g \neq 0$ äquivalen zu

$$\partial_t \ln(g(t)) = 2$$

ist. Durch Integration finden wir

$$g(t) = Ce^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

für ein $C \in \mathbb{R}$. Die Nebenbedingung $g(0) = 2$ schießt den Fall $g \equiv 0$ aus und ist erfüllt falls $C = 2$. Nach Satz 2 der Vorlesung ist also für dieses g das Feld $\vec{v}$ ein Potentialfeld.

b) Wir bestimmen nun noch ein Potential zu diesem Feld. Wie in der vorangegangenen Aufgabe finden wir einen Kandidaten für das Potential, sodass $\nabla\Phi = \vec{v}$ durch Integration. Es ist

$$\Phi(x, y) = \int v_2(x, y)\mathrm{d}y = \int 4x^2e^{2xy} + 1\mathrm{d}y = 2xe^{2xy} + y + c_1(x)$$

Für die partielle Ableitung nach x muss daher gelten

$$\partial_x\Phi(x, y) = 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} + \partial_x c_1(x).$$

Da Phi gleichzeitig das Potential zu $\vec{v}$ sein soll, muss gleichzeitig $\partial_x\Phi(x, y) = v_1(x, y)$ gelten. Es muss also,

$$2e^{2xy} + 4xye^{2xy} + \partial_x c_1(x) = 2(1 + 2xy)e^{2xy}.$$

Dies gilt für $\partial_x c_1(x) = 0$ erfüllt und damit für jedes $c_1(x) = c$ konstant. Es ist also zum Beispiel $\Phi(x, y) = 2xe^{2xy} + y$ ein geeignets Potential.¸