

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 50:

Berechnen Sie mit Hilfe der Zylinderkoordinaten:

- (a) $\int_A xyz \, d(x, y, z)$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$
(b) $\int_B z(x^3 + xy^2) \, d(x, y, z)$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\pi \leq z \leq \pi, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |\frac{y}{x}| \leq 1\}$

Aufgabe 51:

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- (a) $\int_A (x^2 + y^2)^2 e^{2(1-z)^7} \, d(x, y, z)$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq (1-z)^2\}$
(b) $\int_B \sin(z) \, d(x, y, z)$, $B = \{x, y, z \geq 0, x + y + 2z \leq 1\}$

Aufgabe 52:

Es sei $0 < r < R$. Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationstoruses

$$\mathbb{T}_r^R = \{((R + r \cos(\vartheta)) \cos(\varphi), (R + r \cos(\vartheta)) \sin(\varphi), r \sin(\vartheta)) : \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi)\}.$$

Aufgabe 53:

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $R > \rho > 0$ und $n \in \{2, 3\}$, sowie $K(\vec{0}, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$. Entscheiden Sie ob der Grenzwert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K(\vec{0}, R) \setminus K(\vec{0}, \rho)} \|\vec{x}\|^\alpha \, d\vec{x}.$$

existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

Aufgabe 54:

Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial D} f \cdot d\vec{s}$

- (a) direkt und
(b) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 55:

Berechnen Sie das Integral

$$\int_B (xy + yz + zx) \, d(x, y, z), \quad B = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

- (a) direkt und
(b) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 51, 53 und 55 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.