Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

SS21

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösung zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 50:

(a) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_A xyz\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\cos(\varphi)\rho\sin(\varphi)z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1 z\mathrm{d}z\cdot\int_0^{2\pi}\cos(\varphi)\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\cdot\frac{1}{4}=0\end{aligned}$$

(b) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_B z(x^3+xy^2)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{-\pi}^{\pi} z\int_1^2\rho^3\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi+\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z\\ &= 0\cdot\frac{7}{5}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)=0\end{aligned}$$

Aufgabe 51:

(a) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_A (x^2+y^2)^2e^{2(1-z)^7}\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-z}\rho^4e^{2(1-z)^7}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\int_0^1 e^{2(1-z)^7}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_{\rho=0}^{\rho=1-z}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}\int_0^1 e^{2(1-z)^7}(1-z)^6\mathrm{d}z\\ &\overset{x=1-z}{=} \frac{\pi}{3}\int_0^1 e^{2x^7}x^6\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{14}\cdot\left[e^{2x^7}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{\pi}{42}(e^2-1)\end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}\int_B\sin(z)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\frac{1-x-y}{2}}\sin(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x=-\int_0^1\int_0^{1-x}\left[\cos(z)\right]_{z=0}^{z=\frac{1-x-y}{2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\int_0^{1-x}1-\cos\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)+2\left[\sin\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1(1-x)-2\sin\left(\frac{1-x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-4\left[\cos\left(\frac{1-x}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=1}=-\frac{7}{2}+4\cos\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 52:

Betrachte die Abbildung $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(\varphi,\vartheta)=((R+r\cos(\vartheta))\cos(\varphi),(R+r\cos(\vartheta))\sin(\varphi),r\sin(\vartheta))$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Wir zeigen: F ist injektiv auf $[0,2\pi)^2$: Seien dazu $\varphi_1, \varphi_2 \in [0,2\pi)$ und $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0,2\pi)$ mit $F(\varphi_1,\vartheta_1) = F(\varphi_2,\vartheta_2)$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2 \ni (F_1(\varphi_1,\vartheta_1), F_2(\varphi_1,\vartheta_1)) &= \underbrace{(R + r\cos(\vartheta_1))}_{>0}(\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1)) \\
&= \underbrace{(R + r\cos(\vartheta_2))}_{>0}(\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2)) = (F_1(\varphi_2,\vartheta_2), F_2(\varphi_2,\vartheta_2) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Wegen der Bijektivität der Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ gilt $\varphi_1 = \varphi_2$ und $(R + r\cos(\vartheta_2)) = (R + r\cos(\vartheta_2))$. Mit $F_3(\varphi_1,\vartheta_1) = F_3(\varphi_2,\vartheta_2)$, folgt weiter

$$\begin{aligned}
r\cos(\vartheta_1) &= r\cos(\vartheta_2), \\
r\sin(\vartheta_1) &= r\sin(\vartheta_2).
\end{aligned}$$

Wieder folgt mit der Bijektivitat der Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$, dass $\vartheta_1 = \vartheta_2$ gilt. Damit hat sich F als injektiv auf $[0,2\pi)^2$ erwiesen.

Es gilt

$$F'(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)(R + r\cos(\vartheta)) & -r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi)(R + r\cos(\vartheta)) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 & r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$\sqrt{\det\left(F'(\varphi,\vartheta)^T \cdot F'(\varphi,\vartheta)\right)} = \sqrt{\begin{vmatrix} (R + r\cos(\vartheta))^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix}} = r(R + r\cos(\vartheta)) > 0$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ und damit ist $\mathrm{rg}(T'(\varphi,\vartheta)) = 2$ für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Definiere $U = (0,2\pi)^2$, sowie $N_1 = \{F(\varphi,0) : \varphi \in (0,2\pi)\}$, $N_2 = \{F(0,\vartheta) : \vartheta \in (0,2\pi)\}$ und $N_3 = \{F(0,0)\}$. Es ist $N_1 \subseteq F((0,2\pi) \times (-\pi,\pi))$, $N_2 \subseteq F((-\pi,\pi) \times (0,2\pi))$ und $N_3 \subseteq F((-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi))$. Damit gilt nach Abschnitt 20.6 der Vorlesung:

$$\begin{aligned}
o(N_1) &= \int_{(0,2\pi)\times\{0\}} 1 \cdot \sqrt{\det(F'(\varphi,\vartheta)^T F'(\varphi,\vartheta))}\mathrm{d}(\varphi,\vartheta) = 0 \\
o(N_2) &= \int_{\{0\}\times(0,2\pi)} 1 \cdot \sqrt{\det(F'(\varphi,\vartheta)^T F'(\varphi,\vartheta))}\mathrm{d}(\varphi,\vartheta) = 0 \\
o(N_3) &= \int_{\{0\}\times\{0\}} 1 \cdot \sqrt{\det(F'(\varphi,\vartheta)^T F'(\varphi,\vartheta))}\mathrm{d}(\varphi,\vartheta) = 0
\end{aligned}$$

Also ist $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ eine o-Nullmenge. Es ist ferner $\mathbb{T}_r^R = F(U) \cup N$. Wieder nach Abschnitt 20.6 der Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned}
o(\mathbb{T}_r^R) &= \int_{F(U)} \mathrm{d}o = \int_U \sqrt{\det(F'(\varphi,\vartheta)^T F'(\varphi,\vartheta))}\mathrm{d}(\varphi,\vartheta) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + \cos(\vartheta))\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + \cos(\vartheta))\mathrm{d}\vartheta = 4\pi^2 rR
\end{aligned}$$

Aufgabe 53:

Wir machen eine Fallunterscheidung nach der Dimension n:

- $n=2$: Mit Hilfe der Polarkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\setminus K(\vec{0},R)} \|\vec{x}\|^\alpha \,\mathrm{d}\vec{x} &= \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \rho^\alpha \rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_R^\infty \rho^{\alpha+1}\mathrm{d}\rho \\
&= \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha+2}\left[\rho^{\alpha+2}\right]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha \neq -2, \\ 2\pi\left[\log(\rho)\right]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha = -2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{2\pi}{\alpha+2}R^{\alpha+2} & \text{für } \alpha < -2, \\ \infty & \text{für } \alpha \geq -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

- $n=3$: Mit Hilfe der Kugelkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\setminus K(\vec{0},R)} \|\vec{x}\|^\alpha \,\mathrm{d}\vec{x} &= \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^\alpha \rho^2 \cos(\theta)\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = 4\pi \int_R^\infty \rho^{\alpha+2}\mathrm{d}\rho \\
&= \begin{cases} \frac{4\pi}{\alpha+3}\left[\rho^{\alpha+3}\right]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha \neq -3, \\ 4\pi\left[\log(\rho)\right]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha = -3 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{4\pi}{\alpha+3}R^{\alpha+3} & \text{für } \alpha < -3, \\ \infty & \text{für } \alpha \geq -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 54:

(a) Seien $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma_1(t) = (0,t), \quad \gamma_2(t) = (1-t,t), \quad \gamma_3(t) = (0,1-t)$$

für alle $t \in [0,1]$. Dann ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ eine doppelpunktfreie Parameterisierung von ∂D. Dabei liegt D immer „links von γ“. Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} f \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma_1}(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(\gamma_2(t)) \cdot \dot{\gamma_2}(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(\gamma_3(t)) \cdot \dot{\gamma_3}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 [(t^2)] + [-((1-t)^2 + (1-t)t) + ((1-t)^2 t - t^2)] + [(1-t)^2]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 -(1-t)t + (1-t)^2 t\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)t(1-t-1)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^3 - t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^2$ (vgl. Abschnitt 20.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} f \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_D \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \int_0^{1-x} 2xy - x\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x(1-x)^2 - x(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x(1-x)(1-x-1)\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^3 - x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Aufgabe 55:

(a) Da B invariant ist unter Vertauschungen von x, y und z gilt:

$$\int_B (xy + yz + zx)\mathrm{d}(x,y,z) = 3\int_B xy\mathrm{d}(x,y,z)$$

Mit Hilfe der Kugelkoordinaten (vgl. Abschnitt 21.6 der Vorlesung) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
3\int_B xy\mathrm{d}(x,y,z) &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cos(\varphi)\cos(\theta)r\sin(\varphi)\cos(\theta)r^2\cos(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)\cos(\varphi)\cos^3(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{5}\left[\frac{1}{2}\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(\theta))\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{10}[\sin(\theta) - \frac{1}{3}\sin^3(\theta)]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

(b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x,y,z) = (xyz, xyz, xyz)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Wir beobachten

$$\nabla \cdot F(x,y,z) = yz + xz + xy$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. Ferner ist $\partial B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ mit

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{(0,y,z) : \ y,z \geq 0,\ y^2 + z^2 \leq 1\right\}, \\
A_2 &= \left\{(x,0,z) : \ x,z \geq 0,\ x^2 + z^2 \leq 1\right\}, \\
A_3 &= \left\{(x,y,0) : \ x,y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}, \\
A_4 &= \left\{(x,y,z) : \ x,y,z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.
\end{aligned}$$

Da $F(x,y,z) = \vec{0}$ für jedes $(x,y,z) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ausfällt, gilt nach dem Gaußschen Integralsatz (vgl. Abschnitt 21.10) der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_B (xy + yz + zx)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_B \nabla \cdot F(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\partial B} F \cdot N(x,y,z)\mathrm{d}o \\
&= \int_{A_4} F \cdot N(x,y,z)\mathrm{d}o
\end{aligned}$$

Auf A_4 ist der äußere Normalenvektor durch

$$N(x,y,z) = (x,y,z)$$

für alle $(x,y,z) \in A_4$ gegeben. Da A_4 invariant unter Vertauschungen von x, y und z ist, gilt:

$$\int_{A_4} F \cdot N(x,y,z)\mathrm{d}o = \int_{A_4} x^2yz + xy^2z + xyz^2\mathrm{d}o = 3\int_{A_4} x^2yz\mathrm{d}o$$

Es folgt mit Hilfe der sphärischen Koordinaten (vgl. Abschnitt 21.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
3\int_{A_4} x^2yz\mathrm{d}o &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi)\cos^2(\theta)\sin(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\cos^4(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \left[\cos^3(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{5}\left[\cos^5(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$