

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 56: Gegen seien $\vec{\omega}(x, y, z) = (x, y, 1)^T$ und

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2 \text{ und } 0 < z < x + y + 3\}$$

- (a) Skizzieren Sie den Körper K .
- (b) Parametrisieren Sie die drei Flächen F_1, F_2 und F_3 die K beranden.
- (c) Berechnen Sie $\iiint_K \nabla \cdot \vec{\omega} d\tau$ sowie den Fluss durch die drei Flächen aus b) und bestätigen Sie damit den Divergenzsatz im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 57:

Es sei γ eine positiv orientierte Parameterisierung des Bogens, welcher durch Schneiden des Zylinders $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ entsteht. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} (-y^3, x^3, -z^3) \cdot d\vec{s}$$

- (a) direkt und
- (b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 58:

Sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, $R > 0$ und $I = [a, b]$. Ferner sei $f \in C^1(\overline{K}(\vec{x}_0, R) \times I)$, $r \in C^1((a, b), (0, R))$ und $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $u(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{x}_0$. Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt} \iiint_{K(\vec{x}_0, r(t))} f d\tau = \iiint_{K(\vec{x}_0, r(t))} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \frac{r'(t)}{r(t)} \iint_{\partial K(\vec{x}_0, r(t))} f u \cdot \vec{N} d\sigma,$$

für alle $t \in (a, b)$ (*Reynolds'scher Transportsatz* für Kugeln).

Aufgabe 59:

Es sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (1, xz, xy)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_M f \cdot \vec{N} d\sigma$$

(a) direkt und

(b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 60:

Sei $c > 0$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ sei eine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\vec{x}, t) - \Delta u(\vec{x}, t) = 0.$$

Ferner sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3, T > 0$ und u erfülle die Anfangsbedingungen

$$u(\vec{x}, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, 0) = 0 \quad \forall \vec{x} \in K(\vec{x}_0, cT).$$

Schließlich bezeichne $C(\vec{x}_0, T) = \{(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) : \vec{x} \in K(\vec{x}_0, c(T - t))\}$ den *Rückwärtslichtkegel* von $(\vec{x}_0, T)$. Zeigen Sie die *endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit* von Störungen, d.h.

$$u(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall (\vec{x}, t) \in C(\vec{x}_0, T).$$

Hinweis: Betrachten Sie die *lokale Energie* $E : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$E(t) = \frac{1}{2} \iiint_{K(\vec{x}_0, c(T-t))} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \|\nabla u\|^2 \right] d\tau$$

für alle $t \in [0, T]$.

Aufgabe 61:

Betrachten Sie den Kegel $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$, sowie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(x, y, z) = (z, y, z + 1)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes f durch die Oberfläche des Kegels C nach Außen:

$$\iint_{\partial C} f \cdot \vec{N} d\sigma$$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 56, 58 und 60 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.

Erinnerung: Die Übungsklausur findet am Samstag, den **03. Juli 2021** statt. Die Klausur wird online als Open Book Exam von 10:00-12:00 angeboten. Falls Sie einen Übungsschein benötigen können Sie sich ab Mittwoch für diese offiziell Anmelden. Für alle **die keinen Übungsschein benötigen** wird die Klausur als Datei am 03. Juli um 13:00 in Ilias bereit gestellt. Sie können Ihre Lösung dann innerhalb von Ilias in Ihrem Tutorium abgeben. (Abgabeschluss Montag)