

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösung zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 74:

Wir arbeiten den Folgenden Plan ab:

- Es ist $\frac{\sin(x)}{x} = \operatorname{Im} \frac{e^{ix}}{x} =: f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die einzige isolierte Singularität von $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $z_0 := 0$.
- Aus HM1 ist bekannt, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ konvergiert und folglich gilt für seinen Wert (Grenzen dürfen symmetrisch gewählt werden)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

- Sei $R > \pi$. Wegen der Linearität des Integrals gilt

$$\int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_{-R}^{-\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{\pi}^R \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Es ist $\frac{\sin(x)}{x} > 0$ für alle $|x| < \pi$. Nach dem Satz über die Monotone Konvergenz (vgl. Abschnitt 19.4) der Vorlesung gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\int_{-\pi}^{-\rho} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{\rho}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \right).$$

- Seien nun für den Augenblick $R > \pi > \rho$ fest gewählt. Dann gilt

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{\rho}^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \operatorname{Im} \left(\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \right)$$

mit

- Der Weg $\gamma_1 + \gamma_\rho + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5$ ist einfach, geschlossen und schließt keine isolierten Singularitäten von f ein. Folglich gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = - \left(\int_{\gamma_\rho} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz + \int_{\gamma_5} f(z) dz \right).$$

- Wir schätzen die Integrale über γ_j mit $j \in \{3, 4, 5\}$ mit der Standardabschätzung

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \max \{ |f(z)| : z \in \gamma([a, b]) \}$$

aus Abschnitt 22.5 des Skriptes ab zu

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_3} f(z) dz \right| &\leq S \max_{t \in [0, S]} \left| \frac{e^{i(R+it)}}{R+it} \right| \leq S \max_{t \in [0, S]} \frac{e^{-t}}{R} \leq \frac{S}{R}, \\ \left| \int_{\gamma_4} f(z) dz \right| &\leq 2R \max_{t \in [-R, R]} \left| \frac{e^{i(iS-t)}}{iS-t} \right| \leq 2R \frac{e^{-S}}{S}, \\ \left| \int_{\gamma_5} f(z) dz \right| &\leq S \max_{t \in [0, S]} \left| \frac{e^{i(R+i(S-t))}}{R+i(S-t)} \right| \leq S \max_{t \in [0, S]} \frac{e^{t-S}}{R} \leq \frac{S}{R} \end{aligned}$$

ab. Mit der Wahl $S = \sqrt{R}$ folgt demnach

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz, \int_{\gamma_4} f(z) dz, \int_{\gamma_5} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Es bleibt das Integral $-\int_{\gamma_\rho} f(z) dz$ im Limes $\rho \rightarrow 0$ zu bestimmen. Es gilt

$$-\int_{\gamma_\rho} f(z) dz = i \int_0^\pi e^{i\rho e^{it}} dt = i \int_0^\pi e^{-\rho \sin(t) + i\rho \cos(t)} dt.$$

Der Betrag des Integranden

$$\left| e^{-\rho \sin(t) + i\rho \cos(t)} \right| = e^{-\rho \sin(t)} \leq 1$$

ist über $[0, \pi]$ beschränkt. Nach dem Satz über die dominierte Konvergenz (vgl. Abschnitt 19.4 der Vorlesung) gilt deshalb

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^\pi e^{-\rho \sin(t) + i\rho \cos(t)} dt = \int_0^\pi \lim_{\rho \rightarrow 0} e^{-\rho \sin(t) + i\rho \cos(t)} dt = \pi.$$

- Damit gilt zusammenfassend

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{x} dx \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left(\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left(\lim_{R \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz + \int_{\gamma_5} f(z) dz \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left(\left[\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz \right] + \lim_{R \rightarrow 0} \left[\int_{\gamma_3} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz + \int_{\gamma_5} f(z) dz \right] \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left(\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz \right) = \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 75:

Wir arbeiten den Folgenden Plan ab:

- Für alle $x + iy = z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} = \frac{e^x(\cos(y) + i \sin(y)) + e^{-x}(\cos(y) - i \sin(y))}{2} \\ &= \cos(y) \cosh(x) + i \sin(y) \sinh(x) \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \cosh(x + iy) = 0 &\Leftrightarrow (\cos(y) \cosh(x) = 0) \wedge (\sin(y) \sinh(x) = 0) \\ &\Leftrightarrow (\cos(y) = 0) \wedge ((\sin(y) = 0) \vee (\sinh(x) = 0)) \\ &\Leftrightarrow (\cos(y) = 0) \wedge (\sinh(x) = 0) \\ &\Leftrightarrow (x = 0) \wedge \left(y \in \pi \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \right) \right). \end{aligned}$$

Deshalb ist $f : \mathbb{C} \setminus i\pi \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \right) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \frac{1}{\cosh(z)}$ holomorph und $i\pi \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \right)$ ist genau die Menge der Isolierten Singularitäten von f .

- Für den Integranden gilt $\frac{1}{\cosh(x)} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{\cosh(x)} dx.$$

- Sei für den Augenblick $R > 0$ fest gewählt. Dann gilt

$$\int_{-R}^R \frac{1}{\cosh(x)} dx = \int_{\gamma_1} f(z) dz,$$

mit dem Weg $\gamma_1 : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\gamma_1(t) = t$ für alle $t \in [-R, R]$.

- Wir schließen nun den Weg im Komplexen durch

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_2(t) &= R + it, \\ \gamma_3 : [-R, R] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_3(t) &= i\pi - t, \\ \gamma_4 : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_4(t) &= -R + i(\pi - t) \end{aligned}$$

ab.

- Der Weg $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ ist einfach, geschlossen und positiv orientiert. Er schließt genau eine isolierte Singularität $z_0 := i\frac{\pi}{2}$ von f ein. Folglich gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) - \left(\int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz \right).$$

- Wir schätzen die Integrale über γ_j mit $j \in \{2, 4\}$ mit der Standardabschätzung

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \max \{ |f(z)| : z \in \gamma([a, b]) \}$$

aus Abschnitt 22.5 des Skriptes ab zu

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| &\leq \pi \max_{t \in [0, \pi]} \left| \frac{2}{e^{R+it} + e^{-R-it}} \right| \leq \frac{2\pi}{e^R - e^{-R}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \\ \left| \int_{\gamma_4} f(z) dz \right| &\leq \pi \max_{t \in [0, \pi]} \left| \frac{2}{e^{-R+i(\pi-t)} + e^{-(-R+i(\pi-t))}} \right| \leq \frac{2\pi}{e^R - e^{-R}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

- Wegen

$$\cosh(i\pi + t) = \frac{e^{i\pi+t} + e^{-i\pi-t}}{2} = \frac{-e^t - e^{-t}}{2} = -\cosh(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, gilt

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = - \int_{-R}^R \frac{1}{\cosh(i\pi - t)} dt = \int_{-R}^R \frac{1}{\cosh(t)} dt = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Damit ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(f, z_0) - \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

- Wegen $\cosh'(z) = \sinh(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und

$$\sinh(z_0) = \sinh\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} = i \neq 0,$$

folgt nach Abschnitt 22.13 (b) des Skriptes

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{\cosh'(z_0)} = \frac{1}{i} = -i.$$

- Zusammenfassend ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(x)} dx = \pi.$$

Aufgabe 76:

(a) Da f_1 eine gerade Funktion ist, ist $\beta_k(f_1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$\alpha_0(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) f_1(t) dt = \frac{1}{2a\pi} \int_{-a}^a 1 dt = \frac{1}{\pi},$$

während für $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_k(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot t) f_1(t) dt = \frac{1}{2a\pi} \int_{-a}^a \cos(kt) dt = \frac{1}{2ak\pi} [\sin(kt)]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{\sin(ak)}{ak\pi}$$

gilt.

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0+} f_1(t) &=: f_1(t_0)+, \\ \lim_{t \rightarrow t_0-} f_1(t) &=: f_1(t_0)-, \\ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f_1(t_0+h) - f_1(t_0)+}{h} &=: f_1'(t_0)+, \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f_1(t_0+h) - f_1(t_0)-}{h} &=: f_1'(t_0)- \end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{f_1(t_0+)+f_1(t_0-)}{2}$. Insbesondere stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ die Funktion f_1 dar, da f_1 dort stetig ist. Für $t_0 \in \{-a, a\}$ gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f_1)(t_0) = \frac{f_1(t_0+) + f_1(t_0-)}{2} = \frac{1}{4a}.$$

Folglich kann die Konvergenz auch nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig bei $-a$ und a ist.

(b) Da f_2 eine gerade Funktion ist, ist $\beta_k(f_2) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$\begin{aligned}\alpha_0(f_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) f_2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos(t)| dt = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(t) dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left([\sin(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - [\sin(t)]_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\pi} \right) = \frac{4}{\pi}.\end{aligned}$$

Für $\alpha_k(f_2)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir mit dem *Phönix-aus-der-Asche-Trick* vorbereitend eine Stammfunktion von

$$\int \underbrace{\cos(t)}_{u'} \underbrace{\cos(kt)}_v dt = \sin(t) \cos(kt) + k \int \sin(t) \sin(kt) dt$$

Für $k = 1$ ist also

$$\int \cos^2(t) dt = \sin(t) \cos(t) + \int 1 - \cos^2(t) dt \Rightarrow \int \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} (t + \sin(t) \cos(t)),$$

für $k > 1$ führt eine weitere partielle Integration auf

$$\begin{aligned}\sin(t) \cos(kt) + k \int \underbrace{\sin(t)}_{u'} \underbrace{\sin(kt)}_v dt &= \sin(t) \cos(kt) + k \left(-\cos(t) \sin(kt) + k \int \cos(t) \cos(kt) dt \right) \\ \Rightarrow \int \cos(t) \cos(kt) dt &= \frac{1}{1 - k^2} (\sin(t) \cos(kt) - k \cos(t) \sin(kt)).\end{aligned}$$

Damit folgt dann für jedes $k > 1$

$$\begin{aligned}\alpha_k(f_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t)| \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos(t)| \cos(kt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(kt) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(t) \cos(kt) dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi(1 - k^2)} \left([\sin(t) \cos(kt) - k \cos(t) \sin(kt)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin(t) \cos(kt) - k \cos(t) \sin(kt)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi(1 - k^2)} \left(\cos\left(k \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{4}{\pi(1 - k^2)} \cos\left(k \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } k = 4m - 3 \\ \frac{4}{\pi(k^2 - 1)} & \text{für } k = 4m - 2 \\ 0 & \text{für } k = 4m - 1 \\ \frac{-4}{\pi(k^2 - 1)} & \text{für } k = 4m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

Wegen $1 = 4 - 3$ und

$$\begin{aligned}\alpha_1(f_2) &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} [t + \sin(t) \cos(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - [t + \sin(t) \cos(t)]_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\pi} = 0\end{aligned}$$

gilt die obige Formel für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_0+} f_2(t) &=: f_2(t_0)+, \\ \lim_{t \rightarrow t_0-} f_2(t) &=: f_2(t_0)-, \\ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f_2(t_0+h) - f_2(t_0)+}{h} &=: f_2'(t_0)+, \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f_2(t_0+h) - f_2(t_0)-}{h} &=: f_2'(t_0)-\end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{(f_2(t_0)+)+(f_2(t_0)-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_2 , wegen $f_2(\pi) = \lim_{t \rightarrow -\pi+} f_2(t) = 1$, stetig ist, stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi]$ die Funktion f_2 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(f_2)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

ist $\widehat{f_2} \in l^1(\mathbb{Z})$ und nach Abschnitt 22.8 der Vorlesung konvergiert $(S_N(f_2))_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig.

- (c) Da f_3 eine ungerade Funktion ist, ist $\alpha_k(f_3) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Für $\beta_k(f_3)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir mit dem *Phönix-aus-der-Asche-Trick* vorbereitend eine Stammfunktion von

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\sinh(t)}_{u'} \underbrace{\sin(kt)}_v dt &= \cosh(t) \sin(kt) - k \int \underbrace{\cosh(t)}_{u'} \underbrace{\cos(kt)}_v dt \\ &= \cosh(t) \sin(kt) - k \sinh(t) \cos(kt) - k^2 \int \sinh(t) \sin(kt) dt \\ \Rightarrow \int \sinh(t) \sin(kt) dt &= \frac{1}{1+k^2} (\cosh(t) \sin(kt) - k \sinh(t) \cos(kt)).\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\beta_k(f_3) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) f_3(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) \sinh(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi(1+k^2)} [\cosh(t) \sin(kt) - k \sinh(t) \cos(kt)]_0^{\pi} = \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+1} k}{1+k^2}.\end{aligned}$$

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_0+} f_3(t) &=: f_3(t_0)+, \\ \lim_{t \rightarrow t_0-} f_3(t) &=: f_3(t_0)-, \\ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f_3(t_0+h) - f_3(t_0)+}{h} &=: f_3'(t_0)+, \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f_3(t_0-h) - f_3(t_0)-}{h} &=: f_3'(t_0)-\end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{(f_3(t_0)+)+(f_3(t_0)-)}{2}$. Insbesondere stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi] \setminus \{\pi\}$ die Funktion f_3 dar, da f_3 dort stetig ist. Für $t_0 = \pi$ gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f_3)(t_0) = \frac{\sinh(\pi) + \sinh(-\pi)}{2} = 0.$$

Folglich kann die Konvergenz auch nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig bei π ist.

(d) Es gilt

$$\sin^2(t) = \frac{1}{2} \sin^2(t) + \frac{1}{2} \sin^2(t) = \frac{1}{2} \sin^2(t) + \frac{1}{2} (1 - \cos^2(t)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\cos^2(t) - \sin^2(t)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Da Fourier-Koeffizienten eindeutig bestimmt sind, folgt durch Koeffizientenvergleich, dass $\beta_k(f_4) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_0(f_4) = 1$, $\alpha_1(f_4) = 0$, $\alpha_2(f_4) = -\frac{1}{2}$, sowie $\alpha_k(f_4) = 0$ für alle $k > 2$.

Da in diesem Fall die Fourier-Reihe eine endliche Summe ist, konvergiert sie überall (gleichmäßig) gegen f_4 .

Aufgabe 77:

(a) Da f_1 eine gerade Funktion ist, ist $\beta_k(f_1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$\alpha_0(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) |\sin(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) dt = \frac{2}{\pi} [-\cos(t)]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Für $\alpha_k(f_1)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir mit dem *Phönix-aus-der-Asche-Trick* vorbereitend eine Stammfunktion von

$$\int \underbrace{\sin(t)}_{u'} \underbrace{\cos(kt)}_v dt = -\cos(t) \cos(kt) - k \int \cos(t) \sin(kt) dt.$$

Für $k = 1$ ist also

$$\int \sin(t) \cos(kt) dt = -\frac{1}{2} \cos^2(t),$$

für $k > 1$ führt eine weitere partielle Integration auf

$$\begin{aligned} -\cos(t) \cos(kt) - k \int \underbrace{\cos(t)}_{u'} \underbrace{\sin(kt)}_v dt &= -\cos(t) \cos(kt) - k \left(\sin(t) \sin(kt) - k \int \sin(t) \cos(kt) dt \right) \\ \Rightarrow \int \sin(t) \cos(kt) dt &= \frac{1}{k^2 - 1} (\cos(t) \cos(kt) + k \sin(t) \sin(kt)). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \alpha_k(f_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) f_1(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt) \sin(t) dt \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\pi} [\cos^2(t)]_{t=0}^{t=\pi} = 0 & \text{für } k = 1, \\ \frac{2}{\pi(k^2 - 1)} [\cos(t) \cos(kt) + k \sin(t) \sin(kt)]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{k^2 - 1} & \text{für } k > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0^+} f_1(t) &=: f_1(t_0)^+, \\ \lim_{t \rightarrow t_0^-} f_1(t) &=: f_1(t_0)^-, \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f_1(t_0 + h) - f_1(t_0)^+}{h} &=: f_1'(t_0)^+, \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f_1(t_0 - h) - f_1(t_0)^-}{h} &=: f_1'(t_0)^- \end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{f_1(t_0+) + f_1(t_0-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_1 , wegen $f_1(\pi) = \lim_{t \rightarrow -\pi+} f_1(t) = 0$, stetig ist, stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi]$ die Funktion f_1 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(f_1)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

ist $\widehat{f}_1 \in l^1(\mathbb{Z})$ und nach Abschnitt 22.8 der Vorlesung konvergiert $(S_N(f_1))_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig.

(b) Da f_2 eine gerade Funktion ist, ist $\beta_k(f_2) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$\alpha_0(f_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) f_2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh(t) dt = \frac{2}{\pi} [\sinh(t)]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi}.$$

Für $\alpha_k(f_2)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir mit dem *Phönix-aus-der-Asche-Trick* vorbereitend eine Stammfunktion von

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\cosh(t)}_{u'} \underbrace{\cos(kt)}_v dt &= \sinh(t) \cos(kt) + k \int \underbrace{\sinh(t)}_{u'} \underbrace{\sin(kt)}_v dt \\ &= \sinh(t) \cos(kt) + k \cosh(t) \sin(kt) - k^2 \int \cosh(t) \cos(kt) dt \\ \Rightarrow \int \sinh(t) \cos(kt) dt &= \frac{1}{k^2 + 1} (\sinh(t) \cos(kt) + k \cosh(t) \sin(kt)). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \alpha_k(f_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) f_2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt) \cosh(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi(k^2 + 1)} [\sinh(t) \cos(kt) + k \cosh(t) \sin(kt)]_0^{\pi} = \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{k^2 + 1}. \end{aligned}$$

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0+} f_2(t) &=: f_2(t_0)+, \\ \lim_{t \rightarrow t_0-} f_2(t) &=: f_2(t_0)-, \\ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f_2(t_0 + h) - f_2(t_0)+}{h} &=: f_2'(t_0)+, \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f_2(t_0 - h) - f_2(t_0)-}{h} &=: f_2'(t_0)- \end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{f_2(t_0+) + f_2(t_0-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_2 , wegen $f_2(\pi) = \lim_{t \rightarrow -\pi+} f_2(t) = \cosh(\pi)$, stetig ist, stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi]$ die Funktion f_2 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(f_2)| \leq \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

ist $\widehat{f}_2 \in l^1(\mathbb{Z})$ und nach Abschnitt 22.8 der Vorlesung konvergiert $(S_N(f_2))_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig.

- (c) Da f_3 eine ungerade Funktion ist, ist $\alpha_k(f_3) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Für $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir mit partieller Integration vorbereitend zwei Stammfunktionen

$$\begin{aligned} \int \underbrace{t}_v \underbrace{\sin(kt)}_{u'} dt &= -\frac{1}{k} t \cos(kt) + \frac{1}{k} \int \cos(kt) dt \\ &= -\frac{1}{k} t \cos(kt) + \frac{1}{k^2} \sin(kt), \\ \int \underbrace{t^2}_v \underbrace{\sin(kt)}_{u'} dt &= -\frac{1}{k} t^2 \cos(kt) + \frac{2}{k} \int \underbrace{t}_v \underbrace{\cos(kt)}_{u'} dt \\ &= -\frac{1}{k} t^2 \cos(kt) + \frac{2}{k^2} t \sin(kt) - \frac{2}{k^2} \int \sin(kt) dt \\ &= -\frac{1}{k} t^2 \cos(kt) + \frac{2}{k^2} t \sin(kt) + \frac{2}{k^3} \cos(kt). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \beta_k(f_3) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) f_3(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) t(\pi - t) dt = 2 \int_0^{\pi} t \sin(kt) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \sin(kt) dt \\ &= 2 \left[-\frac{1}{k} t \cos(kt) + \frac{1}{k^2} \sin(kt) \right]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{k} t^2 \cos(kt) + \frac{2}{k^2} t \sin(kt) + \frac{2}{k^3} \cos(kt) \right]_{t=0}^{t=\pi} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2\pi}{k} + (-1)^k \frac{2\pi}{k} + \frac{4\pi}{k^3} (1 - (-1)^k) = 8\pi \frac{1 - (-1)^k}{2k^3} \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0+} f_3(t) &=: f_3(t_0)+, \\ \lim_{t \rightarrow t_0-} f_3(t) &=: f_3(t_0)-, \\ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f_3(t_0+h) - f_3(t_0)+}{h} &=: f_3'(t_0)+, \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f_3(t_0-h) - f_3(t_0)-}{h} &=: f_3'(t_0)- \end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{(f_3(t_0)+) + (f_3(t_0)-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von f_3 , wegen $f_3(\pi) = \lim_{t \rightarrow -\pi+} f_3(t) = 0$, stetig ist, stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi]$ die Funktion f_3 dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(f_1)| \leq \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty,$$

ist $\widehat{f}_3 \in l^1(\mathbb{Z})$ und nach Abschnitt 22.8 der Vorlesung konvergiert $(S_N(f_3))_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig.

- (d) Berechne zunächst die komplexen Fourier-Koeffizienten von f_4 . Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned} \widehat{f}_4(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{bt} e^{-ikt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{b - ik} \left[e^{(b-ik)t} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{b - ik} \frac{e^{(b-ik)\pi} - e^{-(b-ik)\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{b - ik} \frac{e^{b\pi} \overbrace{e^{ik\pi}}^{=(-1)^k} - e^{-b\pi} \overbrace{e^{-ik\pi}}^{=(-1)^k}}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sinh(b\pi) \frac{(-1)^k}{b - ik} = \sinh(b\pi) \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^k \frac{b + ik}{b^2 + k^2}. \end{aligned}$$

Für die reellen Fourier-Koeffizienten gilt nach Vorlesung

$$\alpha_k(f_4) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{\widehat{f}_4(k) + \widehat{f}_4(-k)}{2} \right), \quad \beta_j(f_4) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left(\frac{\widehat{f}_4(-j) - \widehat{f}_4(j)}{2} \right)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $j \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$\alpha_0(f_4) = \frac{2 \sinh(b\pi)}{\pi b}, \quad \alpha_k(f_4) = \frac{2 \sinh(b\pi)}{\pi} \frac{(-1)^k b}{b^2 + k^2}, \quad \text{sowie} \quad \beta_k(f_4) = \frac{2 \sinh(b\pi)}{\pi} \frac{(-1)^{k+1} k}{b^2 + k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0+} f_4(t) &=: f_4(t_0)+, \\ \lim_{t \rightarrow t_0-} f_4(t) &=: f_4(t_0)-, \\ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f_4(t_0+h) - f_4(t_0)+}{h} &=: f_4'(t_0)+, \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f_4(t_0-h) - f_4(t_0)-}{h} &=: f_4'(t_0)- \end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung gegen $\frac{f_4(t_0+)+f_4(t_0-)}{2}$. Insbesondere stellt die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi] \setminus \{\pi\}$ die Funktion f_4 dar, da f_4 dort stetig ist. Für $t_0 = \pi$ gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f_4)(t_0) = \frac{e^{b\pi} + e^{-b\pi}}{2}.$$

Folglich kann die Konvergenz auch nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig bei π ist.

Aufgabe 78:

(a) Nach Aufgabe 70 (b) gilt

$$|\cos(t)| = \frac{\alpha_0(f_2)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f_2) \cos(kt) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \cos(2kt)$$

für alle $t \in (-\pi, \pi)$. Einsetzen von $t = 0$ und auflösen liefert den gesuchten Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

(b) Nach Abschnitt 22.5 der Vorlesung lauten die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktion $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $f(t) = t^2$ gerade

$$\alpha_0(f) = \frac{2\pi^2}{3}, \quad \alpha_k(f) = 4 \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \beta_k(f) = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach der Parsevalschen Gleichung (vgl. Abschnitt 22.7) der Vorlesung in der reellen Version gilt

$$\frac{1}{\pi} \|f\|_2^2 = \frac{\alpha_0(f)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f)^2 + \beta_k(f)^2.$$

Einsetzen von $\|f\|_2^2 = \frac{2\pi^5}{5}$, sowie der obigen reellen Fourier-Koeffizienten liefert

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4},$$

wodurch sich durch Auflösen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

ergibt.

Aufgabe 79:

(a) Nach Aufgabe 71 (a) gilt

$$|\sin(t)| = \frac{\alpha_0(f_1)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f_1) \cos(kt) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2kt)$$

für alle $t \in (-\pi, \pi]$. Einsetzen von $t = 0$ und auflösen liefert den gesuchten Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

(b) Nach Abschnitt 22.5 der Vorlesung lauten die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktion $g : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $g(t) = |t|$ gerade

$$\alpha_0(g) = \pi, \quad \alpha_k(g) = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2m, \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k = 2m - 1, \end{cases} \quad \beta_k(g) = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da g stetig bei 0 ist, und die linksseitige, sowie die rechtsseitige Ableitung von g bei 0 existieren, gilt nach Abschnitt 22.9 der Vorlesung ($t = 0$)

$$0 = \frac{\alpha_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(g) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m - 1)^2}.$$

Folglich ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m - 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$