

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1: [Norm und Skalarprodukt $\mathbf{T}$]

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften von Normen und Skalarprodukten. Es ist $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ ein Skalarprodukt und V ein Vektorraum sowie $\|x\|^2 := (x, x)$ die induzierte Norm.

i) Parallelogramm-Gleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

ii) Polarisations-Gleichung

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y)$$

iii) Darstellung des Realteils

$$\operatorname{Re}(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

iv) Dreiecks-Ungleichung und umgekehrte Dreiecks-Ungleichung

$$||x| - |y|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

HINWEIS: Benutzen Sie für die Dreiecks-Ungleichung die Cauchy-Schwarz Ungleichung

Aufgabe 2:

Sei V ein Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm auf diesem Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ stetig ist. Wählen Sie hierfür eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ mit $x_n \rightarrow x \in V$ und zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$$

HINWEIS: Verwenden Sie Aufgabenteil 1 (iv)

Aufgabe 3:

Entscheiden Sie ob folgende Abbildungen ein Skalarprodukt auf dem entsprechenden Vektorraum definieren.

i) $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_1/2$

ii) Sei $(\cdot, \cdot)_2$ das üblich (euklidische) $\mathbb{R}^2$ skalarprodukt. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dann definieren wir $(\cdot, \cdot)_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)_A \mapsto (x, Ay)_2$.

iii) Sei $\mathbb{C}([0, 1])$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$, dann definieren wir

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{C}([0, 1]) \times \mathbb{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\psi, \varphi) = \int \overline{\psi(x)} \varphi(x) dx$$

iv) Ersetze $\mathbb{C}([0,1])$ im vorherigen Beispiel durch den Raum der (Riemann)-Integrierbaren Funktionen.

Aufgabe 4: [Ungleichungen **T**]

Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen:

i) Sei $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, dann

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 1/n$$

ii) Sedrakjans Ungleichung. Es seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}.$$

HINWEIS: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung für das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und benutzen Sie eine geeignete Substitution.

Aufgabe 5: [Orthogonalprojektion **T**]

Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U \subseteq \mathbb{R}^5$, die Orthogonalprojektion $P\vec{x}$ von $\vec{x}$ auf U , sowie den Abstand $d(\vec{x}, U) = \min_{\vec{y} \in U} \|\vec{x} - \vec{y}\|$ für

(a) $U = \text{lin}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\})$ und

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

(b) $U = \text{lin}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\})$ und

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6:

Es sei $V = P[-1,1]$ der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen auf $[a,b]$ und $p_k \in V$ definiert durch

$$p_m(x) = x^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1,1]$ (*Monome*). Ferner seien die Skalarprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ durch

$$(a) \quad \langle p, q \rangle_1 = \int_{-1}^1 \frac{p(y)q(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy \quad \text{bzw.} \quad (b) \quad \langle p, q \rangle_2 = \int_{-1}^1 p(y)q(y) dy$$

für alle $p, q \in V$ erklärt. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ bzw $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ auf p_0, p_1, p_2, p_3 an.

Bemerkung: Sie erhalten die s.g. *Tschebyschow-Polynome* bei (a) und (bis auf Normierung) die s.g. *Legendre-Polynome* bei (b).

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 2, 3, und 6 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.