Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

SS 2023
02.05.2023

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösung zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1: Siehe handschriftliche Lösungen
Aufgabe 2: Siehe handschriftliche Lösungen
Aufgabe 3: Siehe handschriftliche Lösungen

Aufgabe 4:

(a) Wir berechnen mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens (vgl. Abschnitt 15.4 der Vorlesung) ein Orthonormalsystem $B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$, welches U erzeugt, wie folgt:

$$\begin{aligned} & & \vec{b}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \\ \vec{c}_2 &= \vec{v}_2 - (\vec{v}_2|\vec{b}_1)\vec{b}_1 & \vec{b}_2 &= \frac{\vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|} \\ \vec{c}_3 &= \vec{v}_3 - (\vec{v}_3|\vec{b}_1)\vec{b}_1 - (\vec{v}_3|\vec{b}_2)\vec{b}_2 & \vec{b}_3 &= \frac{\vec{c}_3}{\|\vec{c}_3\|} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$(\vec{v}_2|\vec{b}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0) = \frac{3}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \vec{c}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\|\vec{c}_2\| = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$(\vec{v}_3|\vec{b}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ (\vec{v}_3|\vec{b}_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \vec{c}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$\|\vec{c}_3\| = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Nach Abschnitt 15.8 der Vorlesung ist die Orthogonalprojektion $P\vec{x}$ gegeben durch:

$$P\vec{x} = (\vec{x}|\vec{b}_1)\vec{b}_1 + (\vec{x}|\vec{b}_2)\vec{b}_2 + (\vec{x}|\vec{b}_3)\vec{b}_3$$

Wir berechnen:

$$(\vec{x}|\vec{b}_1) = \frac{7}{\sqrt{3}}, \qquad (\vec{x}|\vec{b}_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad (\vec{x}|\vec{b}_3) = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Es folgt:

$$P\vec{x} = \frac{7}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{6}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\5\\8\\13\\0\end{pmatrix}$$

Schließlich ist nach Abschnitt 15.8 der Vorlesung:

$$d(\vec{x}, U) = \min_{\vec{y}\in U} = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} - P\vec{x}\|$$

Wir berechnen:

$$\vec{x} - P\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\5\\8\\13\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\15\end{pmatrix}, \qquad \|\vec{x} - P\vec{x}\| = \frac{\sqrt{228}}{3} \approx 5,03$$

(b) Wie in der ersten Teilaufgabe berechnen wir:

$$\|\vec{v}_1\| = 3 \qquad \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\vec{v}_2|\vec{b}_1) = 3 \qquad \Rightarrow \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\|\vec{c}_2\| = \sqrt{7} \qquad \Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(\vec{v}_3|\vec{b}_1) = 0,\ (\vec{v}_3|\vec{b}_2) = -\frac{14}{\sqrt{7}} \qquad \Rightarrow \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\|\vec{c}_3\| = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{v}_4|\vec{b}_1) = \frac{27}{3} = 9,\ (\vec{v}_4|\vec{b}_2) = 0,\ (\vec{v}_4|\vec{b}_3) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \vec{c}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{c}_4\| = 0 \qquad \Rightarrow \operatorname{lin}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\} = \operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$$

Für die Orthogonalprojektion $P\vec{x}$ berechnen wir

$$(\vec{x}|\vec{b}_1) = 2,\ (\vec{x}|\vec{b}_2) = -\frac{8}{\sqrt{7}},\ (\vec{x}|\vec{b}_3) = -\sqrt{3}$$

und erhalten

$$P\vec{x} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 34 \\ 73 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Schließlich ist:

$$\vec{x} - P\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{21}\begin{pmatrix}7\\-3\\34\\73\\24\end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}14\\24\\8\\-10\\18\end{pmatrix}$$

$$d(\vec{x}, U) = \min_{\vec{y}\in U} \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} - P\vec{x}\| = \frac{\sqrt{14^2 + 24^2 + 8^2 + 10^2 + 18^2}}{21} = \frac{\sqrt{1260}}{21} = \frac{\sqrt{4\cdot 3\cdot 5\cdot 21}}{21} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$$

Aufgabe 5:

(a) Wir benutzen die Notation aus dem Abschnitt 15.4 der Vorlesung. Es ist:

$$\begin{aligned}
\langle p_0, p_0\rangle_1 &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \lim_{b\to -1+}\int_b^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \\
&\overset{x=-t}{=} \lim_{b\to 1-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = 2\lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \\
&\underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to 1-}\int_0^{\arcsin(a)} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\mathrm{d}t = 2\lim_{a\to 1-}\int_0^{\arcsin(a)} \frac{\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{|\cos(t)|}\mathrm{d}t \\
&= 2\lim_{a\to 1-}\int_0^{\arcsin(a)} 1\mathrm{d}t = 2\lim_{a\to 1-}\arcsin(a) = 2\frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

Also ist $b_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ für alle $t \in [-1, 1]$.

Ferner ist

$$\langle p_1, b_0\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y.$$

Wegen $\left|\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ für alle $y \in (-1, 1)$ und da das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$ nach obiger Rechnung konvergiert, konvergiert auch das uneigentliche Integral in $\langle p_1, b_0\rangle_1$ nach dem Majorantenkriterium. Da der Integrand punktsymmetrisch ist, gilt $\langle p_1, b_0\rangle_1 = 0$. Des Weiteren ist

$$\begin{aligned}
\langle p_1, p_1\rangle_1 &= \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \lim_{b\to -1+}\int_b^0 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \\
&\overset{x=-t}{=} 2\lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to 1-}\int_0^{\arcsin(a)} \frac{\sin^2(t)\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{\sqrt{\cos^2(t)}}\mathrm{d}t \\
&= 2\lim_{a\to 1-}\int_0^{\arcsin(a)} \sin^2(t)\mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\mathrm{d}t \\
&= [t - \sin(t)\cos(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Also ist $b_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}t$ für alle $t \in [-1, 1]$.

Ferner ist

$$\langle p_2, b_0\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle p_1, p_1\rangle_1 = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

und

$$\langle p_2, b_1\rangle_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y.$$

Wie bei $\langle p_1, b_0\rangle_1$ sieht man, dass $\langle p_2, b_1\rangle = 0$ gilt. Für alle $t \in [-1,1]$ gilt also

$$c_2(t) = p_2(t) - \langle p_2, b_0\rangle_1 b_0(t) - \langle p_2, b_1\rangle_1 b_1(t) = t^2 - \frac{1}{2}.$$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned}
\langle c_2, c_2\rangle_1 &= \int_{-1}^{1} \frac{\left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y - \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y - \langle p_1, p_1\rangle_1 + \frac{1}{4} \langle p_0, p_0\rangle_1 = \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y - \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y &= \lim_{b \to -1+} \int_{b}^{0} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y + \lim_{a \to 1-} \int_{0}^{a} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y \\
&\overset{x=-t}{=} 2 \lim_{a \to 1-} \int_{0}^{a} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y \underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2 \lim_{a \to 1-} \int_{0}^{\arcsin(a)} \frac{\sin^4(t) \overbrace{\cos(t)}^{>0}}{\sqrt{\cos^2(t)}} \mathrm{d}t \\
&= 2 \lim_{a \to 1-} \int_{0}^{\arcsin(a)} \sin^4(t) \mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t) \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion zu $\sin^4$ lässt sich mit dem *Phönix-aus-der-Asche-Trick* berechnen:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4(t) \mathrm{d}t &= \int \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)} \underbrace{\sin^3(t)}_{v(t)} \mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3 \int \cos^2(t) \sin^2(t) \mathrm{d}t \\
&= -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3 \int (1 - \sin^2(t)) \sin^2(t) \mathrm{d}t \\
&= -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3 \int \sin^2(t)) \mathrm{d}t - 3 \int \sin^4(t) \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{3}{2}(t - \sin(t)\cos(t)) - \cos(t)\sin^3(t)\right] - 3 \int \sin^4(t) \mathrm{d}t \\
\Rightarrow \int \sin^4(t) \mathrm{d}t &= \left[\frac{3}{8} t - \cos(t) \left(\frac{\sin^3(t)}{4} + \frac{3\sin(t)}{8}\right)\right]
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t) \mathrm{d}t = \frac{3\pi}{8} \text{ und } \langle c_2, c_2\rangle_1 = \frac{\pi}{8}.$$

Also ist $b_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2t^2 - 1)$ für alle $t \in [-1,1]$.

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
\langle p_3, b_0\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle p_2, b_1\rangle_1 = 0,\\
\langle p_3, b_1\rangle_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \overset{\text{s.o.}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2\pi}\frac{3}{8},\\
\langle p_3, b_2\rangle_1 &= \sqrt{\frac{8}{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y^3(y^2-\frac{1}{2})}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\left(\int_{-1}^{1}\frac{y^5}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\right) = 0,
\end{aligned}$$

da $\int_{-1}^{1}\frac{y^5}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = 0$ wie bei $\langle p_1, b_0\rangle_1$ und $\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\langle p_2, b_1\rangle_1 = 0$. Damit ist für alle $t \in [-1,1]$

$$c_3(t) = p_3(t) - \langle p_3, b_0\rangle_1 b_0(t) - \langle p_3, b_1\rangle_1 b_1(t) - \langle p_3, b_2\rangle_1 b_2(t) = t^3 - \frac{3}{4}t.$$

Es bleibt noch

$$\begin{aligned}
\langle c_3, c_3\rangle_1 &= \int_{-1}^{1}\frac{\left(y^3-\frac{3}{4}y\right)^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\frac{y^6}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y + \frac{9}{16}\int_{-1}^{1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\
&= \int_{-1}^{1}\frac{y^6}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{8}\pi + \frac{9}{16}\cdot\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1}\frac{y^6}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y - \frac{9}{32}\pi
\end{aligned}$$

zu berechnen. Wie bei $\langle c_2, c_2\rangle_1$ sieht man, dass

$$\int_{-1}^{1}\frac{y^6}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(t)\mathrm{d}t.$$

Wieder liefert der *Phönix-aus-der-Asche-Trick*:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sin(t)}_{u'(t)}\underbrace{\sin^4(t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[\cos(t)\sin^4(t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} + 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\sin^4(t)\mathrm{d}t\\
&= 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(t))\sin^4(t)\mathrm{d}t\\
&\overset{\text{s. o.}}{=} 5\left[\frac{3}{8}t - \cos(t)\left(\frac{\sin^3(t)}{4}+\frac{3\sin(t)}{8}\right)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(t)\mathrm{d}t\\
&= \frac{15}{16}\pi - 5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(t)\mathrm{d}t\\
\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(t)\mathrm{d}t &= \frac{5}{32}\pi
\end{aligned}$$

Also ist $\langle c_3, c_3\rangle_1 = \frac{\pi}{32}$ und für alle $t \in [-1,1]$ ist

$$b_3(t) = \sqrt{\frac{32}{\pi}}\left(t^3 - \frac{3}{4}t\right).$$

(b) Wieder mit der Notation aus dem Abschnitt 15.4 der Vorlesung gilt:

$$\langle p_0, p_0\rangle_2 = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}y = 2.$$

Also ist $b_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für alle $t \in [-1, 1]$.

Ferner ist

$$\langle p_1, b_0 \rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} y \, \mathrm{d}y = 0.$$

Des Weiteren ist

$$\langle p_1, p_1 \rangle_2 = \int_{-1}^{1} y^2 \, \mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3} \right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{2}{3}.$$

Also ist $b_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t$ für alle $t \in [-1, 1]$.

Ferner ist

$$\langle p_2, b_0 \rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} y^2 \, \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \text{und} \qquad \langle p_2, b_1 \rangle_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} y^3 \, \mathrm{d}y = 0.$$

Also ist

$$c_2(t) = p_2(t) - \langle p_2, b_0 \rangle_2 \, b_0(t) - \langle p_2, b_1 \rangle_2 \, b_1(t) = t^2 - \frac{1}{3}$$

für alle $t \in [-1, 1]$ und wegen

$$\langle c_2, c_2 \rangle_2 = \int_{-1}^{1} \left(y^2 - \frac{1}{3} \right)^2 \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} y^4 - \frac{2}{3} y^2 + \frac{1}{9} \mathrm{d}y = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

ist $b_2(t) = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)$ für alle $t \in [-1, 1]$.

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \langle p_3, b_0 \rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} y^3 \mathrm{d}y = 0, \\ \langle p_3, b_1 \rangle_2 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} y^4 \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{5}, \\ \langle p_3, b_2 \rangle_2 &= \sqrt{\frac{45}{8}} \int_{-1}^{1} y^3 \left(y^2 - \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{45}{8}} \int_{-1}^{1} y^5 - \frac{1}{3} y^3 \mathrm{d}y = 0 \end{aligned}$$

und damit

$$c_3(t) = p_3(t) - \langle p_3, b_2 \rangle_2 \, b_2(t) - \langle p_3, b_1 \rangle_2 \, b_1(t) - \langle p_3, b_0 \rangle_2 \, b_0(t) = t^3 - \frac{3}{5} t$$

für alle $t \in [-1, 1]$. Es bleibt noch

$$\langle c_3, c_3 \rangle_2 = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right)^2 \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^6 - \frac{6}{5} t^4 + \frac{9}{25} t^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{8}{175}$$

zu berechnen. Also ist $b_3(t) = \sqrt{\frac{175}{8}} \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right)$ für alle $t \in [-1, 1]$.

Lösungsvorschlag HM2 Physik ÜB 01

A1 i) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle$

$$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

ii) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$$= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

iii) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle$

$$= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 - (\|x\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|y\|^2)$$

$$= \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle}$$

$$= 4\operatorname{Re}\langle x,y\rangle$$

iv) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle$

$$\underset{\text{CSU}}{\leq} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^3$$

Umgehehrte UGl: $\|x\| = \|x+y-y\| \underset{\Delta\text{-UGl}}{\leq} \|x+y\| + \|y\| \Rightarrow \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x+y\|$

A2| Siehe Übungsnotizen ÜB01

A3| i)

$$\langle x,y\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{x_2y_1}{2}$$
$$\langle y,x\rangle = 2y_1x_1 + y_2x_2 + \frac{y_2x_1}{2}$$

$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \Rightarrow \frac{x_2y_1}{2} = \frac{y_2x_1}{2} \Rightarrow x_2y_1 = y_2x_1$

was im allgemeinen falsch ist. Widerspruch zur Symmetrie des Shalarprodukts

ii) Kann kein Shalarprodukt sein da $\ker(A) \neq \emptyset$

wähle z.B $v = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, dann gilt $Av = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

und damit $(v,v)_A = 0$ aber $v \neq \emptyset$.

Widerspruch zur positivität.

iii) Dies ist ein Shalarprodukt. (Physiker-konvention)

Symmetrie und linearität folgen direkt als Eigenschaften des Integrals.

Positivität. Sei $\varphi \in \mathbb{C}([0,1])$ mit $\varphi \neq 0$ d.h

es ex. ein x_0 mit $\varphi(x_0) \neq 0 \Rightarrow |\varphi(x_0)|^2 > 0$

und da $|\varphi_c(x_0)| > 0$ und $|\varphi(\cdot)|$ stetig folgt die

Existenz einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0) \subseteq [0,1]$ mit

$|U_\varepsilon(x_0)| > 0$ und $|\varphi(x_0)| > \frac{x_0}{2}$ auf dieser Umgebung.

Es gilt also

$$\langle \varphi,\varphi\rangle = \int_0^1 |\varphi(x_0)|^2 dx \geq \int_{U_\varepsilon(x_0)} \frac{x_0}{2}\, dx = \frac{x_0}{2}|U_\varepsilon(x_0)| > 0$$

Für $\varphi \equiv 0 \Rightarrow \langle\varphi,\varphi\rangle = 0$ (trivial.)

Das Skalarprodukt ist wohldefiniert da $|\varphi(\cdot)|^2$ als stetige Fkt auf dem Kompakten Intervall (Riemann)-Integrierbar ist.

iv) Falls man $C([0,1])$ durch $R([0,1])$ ersetzt, dann gilt die Positivität nicht mehr, denn

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist Riemann - Integrierbar und $\varphi \neq 0$ aber

$$\langle\varphi,\varphi\rangle = \int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx = 0 \quad .$$

A4,

i) Betrachte den Vektor $a,b \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$\langle a,b\rangle = \sum a_i b_i$$

das euklidsche Skalarprodukt.

Wir benutzen die Cauchy-Schwartzsche UGl

$\langle a,b\rangle \leq \|a\|\|b\|$

mit $b = (1,1,\dots,1)^T$ gilt $\|b\| = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

und mit $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ folgt

$$\|a\|\|b\| = \|a\| n \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

$$\Rightarrow \|a\| \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{1}{n}$$

ii) Sedrakyans Ungleichung:

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ dann gilt die Cauchy-Schwarz-UGL

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$$

Wähle nun $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ und $y_i = \sqrt{b_i}$, dann gilt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\cancel{\sqrt{b_i}}} \cancel{\sqrt{b_i}} = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

und $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i}$ sowie $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i}$$