

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 7: [Inverse Matrix $\mathbf{T}$]

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

die Inverse A^{-1} .

Aufgabe 8: [Determinante $\mathbf{T}$]

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}.$$

Aufgabe 9: [Spatprodukt $\mathbf{T}$]

Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

(i) Es ist

$$(\vec{a} \mid \vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

(ii) Es ist

$$(\vec{a} \mid \vec{b} \times \vec{c}) (\vec{x} \mid \vec{y} \times \vec{z}) = \det \begin{pmatrix} (\vec{a} \mid \vec{x}) & (\vec{a} \mid \vec{y}) & (\vec{a} \mid \vec{z}) \\ (\vec{b} \mid \vec{x}) & (\vec{b} \mid \vec{y}) & (\vec{b} \mid \vec{z}) \\ (\vec{c} \mid \vec{x}) & (\vec{c} \mid \vec{y}) & (\vec{c} \mid \vec{z}) \end{pmatrix}$$

HINWEIS: Weisen Sie die Gleichheit in (i) anhand der Definitionen in den Vorlesungsnotizen nach (Siehe 17.14) und benutzen Sie für (ii) den Determinantenmultiplikationssatz 17.9 ohne Beweis.

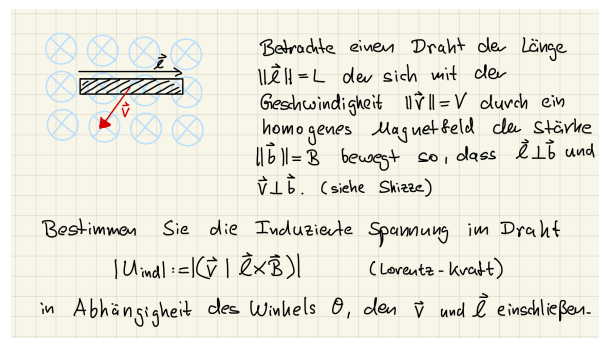


Abbildung 1: Beispielanwendung für das Spatprodukt

Aufgabe 10:

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

(a) die *Graßmann-Identität*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}|\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}|\vec{b}),$$

(b) die *Jacobi-Identität*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0,$$

(c) sowie die *Lagrange-Identität*

$$(\vec{a} \times \vec{b} \mid \vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}|\vec{c})(\vec{b}|\vec{d}) - (\vec{b}|\vec{c})(\vec{a}|\vec{d}).$$

Aufgabe 11:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt:

$$\text{Bild}(A)^\perp = \text{Kern}(A^*)$$

Hinweis: Für $M \subseteq V$ ist $M^\perp = \{v \in V : (v|w) = 0 \quad \forall w \in M\}$ (*Orthogonalraum* von M).

(b) Gilt $(A\vec{x}|\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, so ist

$$\text{Bild}(A) \perp \text{Kern}(A).$$

Hinweis: Für $M, N \subseteq V$ ist $M \perp N \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in M : \forall \vec{y} \in N : (\vec{x}|\vec{y}) = 0$

Aufgabe 12: Sei $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, dann heißt

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$$

Vandermond Matrix. Zeigen Sie im Fall $n = m$, dass die Determinante der Vandermondschen Matrix

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Gibt es eine anschauliche Interpretation dieser Determinante? Was bedeutet es, dass diese Determinante verschwindet oder nicht verschwindet?

Betrachten Sie das folgende Beispiel:

Es seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie die Vandermond Matrix um das Polynom zweiten grades

$$p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

zu bestimmen für welches $p(0) = 1$, $p(1) = 2$ und $p(3) = -1$ gilt.

Hinweis:

Um die Determinante zu bestimmen subtrahiert man von jeder Spalte (bis auf der Ersten) die vorhergehende Spalte multipliziert mit x_0 . Die erste Zeile sollte dann nur eine 1 und sonst 0 enthalten. Nach dieser Zeile kann man entwickeln (Laplace-Entwicklung).

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 10, 11 und 12 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.