Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis SS21

apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann Marvin Schulz, M.Sc.

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösung zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 7:

Wir bilden die erweiterte Matrix

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

auf und führen das Eliminationsverfahren nach Gauß durch:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad | \cdot -\tfrac{1}{10} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad | \cdot 5 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{2} & -\frac{17}{2} & -11 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \left(I|A^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Also ist die Inverse A^{-1} gegeben durch:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{31}{2} & -\frac{17}{2} & -11 \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8:

Nach Abschnitt 17.2 der Vorlesung, ändert sich der Wert der Determinante nicht, wenn man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte dazuaddiert. Da nach Abschnitt 17.8 der Vorlesung das Transponieren den Wert der Determinante ebenfalls nicht ändert, gilt die gleiche

Regel für Zeilenumformungen. Es folgt:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1)\ \cdot(-1)\ \cdot(-1)\ \cdot(-1) \\ + \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 34 \\ 0 & 4 & 14 & 34 & 69 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2)\ \cdot(-3)\ \cdot(-4) \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 6 & 22 & 53 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-3)\ \cdot(-6) \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 17 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot(-4) \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nach Abschnitt 17.5 der Vorlesung ist die Determinante einer oberen rechten Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Also ist $\det(A) = 1$.

Aufgabe 9: Vgl. Handgeschriebene Lösung

Aufgabe 10: Die verschiedenen Idenditäten rechnet man einfach nach!

Aufgabe 11:

(a) Wir zeigen zunächst, dass in jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum V für alle $x \in V$

$$\forall y \in V : (x|y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

gilt.

Beweis: $\Rightarrow$: Wähle $y = x$, dann ist $(x|x) = 0$. Das ist nach Eigenschaft (S3) (vgl. Abschnitt 15.1 der Vorlesung) nur für $x = 0$ möglich.

$\Leftarrow$: Sei $y \in V$ beliebig. Es gilt $(0|y) = (y - y|y) = (y|y) - (y|y) = 0$.

$\square$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \mathrm{Bild}(A)^{\perp} &\Leftrightarrow \forall \vec{z} \in \mathrm{Bild}(A) : (\vec{x}|\vec{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \vec{y} \in \mathbb{K}^n : (\vec{x}|A\vec{y}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \vec{y} \in \mathbb{K}^n : (A^*\vec{x}|\vec{y}) = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist nach Obigem äquivalent zu $A^*\vec{x} = 0$. Dies ist wiederum äquivalent zu $x \in \mathrm{Kern}(A^*)$.

$\square$

(b) Seien $\vec{y} \in \text{Kern}(A)$ und $\vec{z} \in \text{Bild}(A)$ beliebig. Es ist $(\vec{z}|\vec{y}) = 0$ zu zeigen. Da $\vec{z} \in \text{Bild}(A)$, existiert ein $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ mit $A\vec{x} = \vec{z}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(\vec{z}|\vec{y}) &= (A\vec{x}|\vec{y}) = (A\vec{x} + 0|\vec{y}) \overset{\vec{y}\in\text{Kern}(A)}{=} (A\vec{x} + A\vec{y}|\vec{y}) = (A(\vec{x}+\vec{y})|\vec{x}+\vec{y}-\vec{x}) \\
&= (A(\vec{x}+\vec{y})|(\vec{x}+\vec{y})) - (A\vec{x}+A\vec{y}|\vec{x}) \overset{\text{Voraus.}}{=} (A\vec{x}+A\vec{y}|\vec{x}) \overset{\vec{y}\in\text{Kern}(A)}{=} (A\vec{x}|\vec{x}) \overset{\text{Voraus.}}{=} 0
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 12:
Vgl. handschriftliche Notizen der Übung.

A9, Erinnerung Kreuzprodukt

$\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ dann gilt:

$$b \times c = \varepsilon_{ijk}\, b_i c_j \hat{e}_k \quad \text{" } = \det\begin{pmatrix} \hat{e}_1 & | & | \\ \hat{e}_2 & \vec{b} & \vec{c} \\ \hat{e}_3 & | & | \end{pmatrix} \text{ "}$$

(Summen über doppelte Indices sind impliziert)

(Regel von Sarrus)

Wir schreiben also das Spatprodukt

$$(\vec{a} \mid \vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}_k (\vec{b} \times \vec{c})_k$$
$$= \vec{a}_k\, \varepsilon_{ijk}\, \vec{b}_i \vec{c}_j$$
$$= \varepsilon_{ijk}\, \vec{b}_i \vec{c}_j \vec{a}_k = \det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{b} & \vec{c} & \vec{a} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Mit dem Levi-Cevita Symbol ε_{ijk} ist die Berechnung also klar. Es ist für das Tut evtl. ganz nett Levi-Cevita zu erklären.

Nach mitteln der Vorlesung:

Die Determinante ist die eindeutige Abbildung $\det : \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit:

(D1) $\det(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n) = 1$

(D2) $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ und $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_j \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \alpha \vec{a}_j + \beta \vec{b}_j, \ldots, \vec{a}_n)$$
$$= \alpha \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n) + \beta \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}_j, \ldots, \vec{a}_n)$$

(D3) $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = 0$ falls es $j \neq k$ gibt mit $\vec{a}_j = \vec{a}_k$

Dh falls wir für $(a|b\times c) = \text{spat}(a,b,c) : \mathbb{K}^3\times\mathbb{K}^3\times\mathbb{K}^3 \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften D1 – D3 nachweisen gilt gleichheit

(D1) $(\hat{e}_1|\underbrace{\hat{e}_2\times\hat{e}_3}) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 1$

$$= \begin{array}{cc} \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} \end{array} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

" Da $\hat{e}_2\times\hat{e}_3$ senkrecht auf $\hat{e}_2$ und $\hat{e}_3$ muss $\hat{e}_2\times\hat{e}_3 \parallel \hat{e}_1$ sein und $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3$ spannen den Kubus mit volumen 1 auf so, dass $\hat{e}_2\times\hat{e}_3 = 1\hat{e}_1$

(D2)
$$\begin{aligned}\text{spat}(a_1, \alpha a_2+\beta b_2, a_3) &= (a_1|(\alpha a_2+\beta b_2)\times a_3) \\ &= \alpha(a_1|a_2\times a_3) + \beta(a_1, b_2\times a_3) \\ &= \alpha\,\text{spat}(a_1,a_2,a_3) + \beta\,\text{spat}(a_1,a_2,a_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{spat}(a_1, a_2, \alpha a_3+\beta b_3) &= -\,\text{spat}(a_1, \alpha a_3+\beta b_3, a_2) \\ &= -\alpha\,\text{spat}(a_1,a_3,a_2) - \beta\,\text{spat}(a_1,b_3,a_2) \\ &= \alpha\,\text{spat}(a_1,a_2,a_3) + \beta\,\text{spat}(a_1,a_2,b_3)\end{aligned}$$

und $\text{spat}(\alpha a_1+\beta b_1, a_2, a_3) = \alpha\,\text{spat}(a_1,a_2,a_3) + \beta\,\text{spat}(b_1,a_2,a_3)$ trivial da Skalarprodukt linear.

(D3) $\text{spat}(a,b,b) = 0$ da $b\times b = 0$

$\text{spat}(a,a,b) = 0$ da $a\times b$ senkrecht auf a nach Definition.

$\text{spat}(a,b,a) = 0$ da $b\times a$ senkrecht auf a nach Definition.

Es muss also $\det(a\ b\ c) = \text{spat}(a,b,c)$ gelten!

(ii) Nach Vorlesung ist $\det(A) = \det(A^T)$

$$\Rightarrow \operatorname{spat}(a,b,c) = \det\begin{pmatrix} - & a & - \\ - & b & - \\ - & c & - \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{spat}(a,b,c)\operatorname{spat}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} - & a & - \\ - & b & - \\ - & c & - \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} | & | & | \\ x & y & z \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

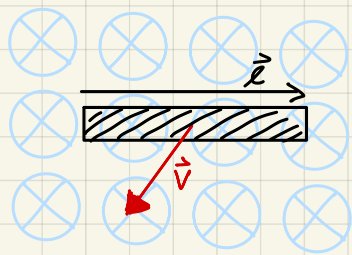
$$= \det\left(\begin{pmatrix} - & a & - \\ - & b & - \\ - & c & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ x & y & z \\ | & | & | \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} (a|x) & (a|y) & (a|z) \\ (b|x) & (b|y) & (b|z) \\ (c|x) & (c|y) & (c|z) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Fur $(a,b,c) = (x,y,z)$ heißt das

$$|\operatorname{spat}(a,b,c)|^2 = \det\begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a|b) & (a|c) \\ (b|a) & \|b\|^2 & (b|c) \\ (c|a) & (c|b) & \|c\|^2 \end{pmatrix}$$

D.h a,b,c sind genau dann linear unabhängig fall die determinante auf der rechten Seite verschwindet (Nice to know).



Betrachte einen Draht der Länge $\|\vec{\ell}\| = L$ der sich mit der Geschwindigkeit $\|\vec{v}\| = V$ durch ein homogenes Magnetfeld der Stärke $\|\vec{b}\| = B$ bewegt so, dass $\vec{\ell} \perp \vec{b}$ und $\vec{v} \perp \vec{b}$. (siehe Skizze)

Bestimmen Sie die Induzierte Spannung im Draht

$$|U_{ind}| := |(\vec{V} \mid \vec{\ell} \times \vec{B})| \qquad \text{(Lorentz-Kraft)}$$

in Abhängigkeit des Winkels θ, den $\vec{v}$ und $\vec{\ell}$ einschließen.

Lösung:

$$|(\vec{\ell} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}|^2 = \det \begin{pmatrix} \|\ell\|^2 & (\vec{\ell} \mid \vec{B}) & (\vec{\ell} \mid \vec{v}) \\ (\vec{B} \mid \vec{\ell}) & \|\vec{B}\|^2 & (\vec{B} \mid \vec{v}) \\ (\vec{v} \mid \vec{\ell}) & (\vec{v} \mid \vec{B}) & \|\vec{v}\|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \|\ell\|^2 & 0 & \|\ell\| \, \|V\| \cos(\theta) \\ 0 & \|B\|^2 & 0 \\ \|\ell\| \, \|V\| \cos(\theta) & 0 & \|V\|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \|B\|^2 \det \begin{pmatrix} \|\ell\|^2 & \|\ell\| \, \|V\| \cos(\theta) \\ \|\ell\| \, \|V\| \cos(\theta) & \|V\|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \|\ell\| \, \|V\| \, \|B\|^2 \det \begin{pmatrix} \|\ell\| & \|V\| \cos(\theta) \\ \|\ell\| \cos(\theta) & \|V\| \end{pmatrix}$$

$$= \|\ell\|^2 \|V\|^2 \|B\|^2 (1 - \cos(\theta)^2)$$

$$= \|\ell\|^2 \|V\|^2 \|B\|^2 \sin^2(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad |U_{ind}| = L V B \sin(\theta)$$