

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik**3. Übungsblatt****Aufgabe 13:**

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte λ von A und ihre algebraischen Vielfachheiten $m_a(\lambda)$.
- (b) Bestimmen Sie für alle Eigenwerte λ ihre geometrische Vielfachheit $m_g(\lambda)$, sowie den zugehörigen Eigenraum $E_A(\lambda)$.
- (c) Ist A diagonalisierbar? Geben Sie ggf. eine reguläre Matrix S an, mit der $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 14: [Eigenwerte $\mathbf{T}$]

Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -7 & -2 & 2 \\ -4 & 10 & 5 & -2 \\ 6 & -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte λ von B und ihre algebraischen Vielfachheiten $m_a(\lambda)$.
- (b) Bestimmen Sie für alle Eigenwerte λ ihre geometrische Vielfachheit $m_g(\lambda)$, sowie den zugehörigen Eigenraum $E_B(\lambda)$.
- (c) Ist B diagonalisierbar? Geben Sie ggf. eine reguläre Matrix S an, mit der $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 15:Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit

$$(A\vec{x}|\vec{x}) = 0$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$.

- (a) Zeigen Sie, dass falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, bereits $A = 0$ sein muss.
- (b) Ist die Aussage auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ richtig?

Hinweis: Die Ergebnisse der Aufgabe 11 (b) könnten nützlich sein.

Aufgabe 16: [Lineare Abbildungen **T**]

Sei $\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ fest. Berechnen Sie für die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T\vec{x} = \vec{x} \times \vec{y}$$

- (a) die Adjungierte T^* ,
- (b) den $\text{Kern}(T)$ und
- (c) das $\text{Bild}(T)$.

Hinweis: Die Ergebnisse der Aufgabe 11 (a) könnten nützlich sein.

Aufgabe 17:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ eine diagonalisierbare Matrix mit

$$A^3 = A^2 + A - I$$

und $\text{Spur}(A) = 1$. Wobei I die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{5 \times 5}$ bezeichnet.

- i) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenvektoren.
- ii) Für welche $k \in \mathbb{N}$ gilt $A^{2k} = A^k$?

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 13, 15 und 17 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.