

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 18:

Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine orthogonale Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.
- Bestimmen Sie eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ derart, dass $W^2 = A$ gilt.

Aufgabe 19: [Diagonalisieren von Matrizen $\mathbf{T}$]

Betrachten Sie

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und geben Sie eine orthogonale Matrix T an, so dass $T^{-1}BT$ Diagonalgestalt hat.
- Berechnen Sie B^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 20:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

Aufgabe 21: [Definitheit $\mathbf{T}$]

Seien $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Matrizen

$$B_\beta = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

auf Definitheit.

Aufgabe 22:

Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_A(\lambda) \setminus \{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{C}^n$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .

(a) Zeigen Sie:

(i) Dann ist $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A und

$$\vec{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\bar{\lambda}$.

(ii) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so existiert ein Eigenvektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ zum Eigenwert λ .

(b) Sei nun A orthogonal und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Bezeichne ferner

$$\vec{x}_1 := \operatorname{Re} \vec{x} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} x_1 \\ \operatorname{Re} x_2 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} x_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}_2 := \operatorname{Im} \vec{x} := \begin{pmatrix} \operatorname{Im} x_1 \\ \operatorname{Im} x_2 \\ \vdots \\ \operatorname{Im} x_n \end{pmatrix}$$

den Real- bzw. Imaginärteil von $\vec{x}$. Sei $U = \operatorname{lin}(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}) \subseteq \mathbb{R}^n$ der von $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ erzeugte *reelle* Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

(i) Zeigen Sie, dass $(\vec{x}_1 | \vec{x}_2) = 0$ und $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \neq \vec{0}$.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $\vec{y} \in U$ auch $A\vec{y} \in U$ gilt. Stellen Sie $A\vec{y}$ mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung von λ dar und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 23: [simultane diagonalisierbarkeit **T**]

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Man nennt A, B *simultan diagonalisierbar*, falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt, so dass sowohl $S^{-1}AS$, als auch $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt haben. Zeigen Sie:

(a) Sind A, B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.

(b) Gilt $AB = BA$ und haben überdies alle Eigenwerte von A die algebraische Vielfachheit eins, dann sind A, B simultan diagonalisierbar.

Aufgabe 24: Satz von Cayley Hamilton. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $c_p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$. Wir zeigen, dass $c_p(A) = 0I$ die Nullmatrix ist.

a) Zeigen Sie den Satz für alle 2×2 Matrizen.

b) Zeigen Sie, dass für jede diagonalisierbare Matrix der Satz von Cayley Hamilton gilt.

c) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für einen Jordanblock

$$J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt der Satz von Cayley Hamilton.

d) Zeigen Sie, dass der Satz von Cayley Hamilton für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt.

HINWEISE: Die Aussage in a) lässt sich einfach nachrechnen. In b) ist es nützlich, dass N nilpotent ist. Sie können in c) verwenden, dass jede Matrix in $\mathbb{C}^{n \times n}$ ähnlich zu einer Jordan-Matrix ist. Für c) verwendet man b) und die Blockgestalt der Jordanmatrix. Es gibt einen alternativen Beweis für c). Man nutzt, dass J durch eine Folge diagonalisierbaren Matrizen approximierbar ist (Weshalb gilt das) und benutzt ein Dichtheitsargument.