

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## 5. Übungsblatt

### Aufgabe 25: [ Stetigkeit und Grenzwerte Mehrdimensional **T** ]

Die Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  sind für  $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$  durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \quad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \quad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

gegeben und es sei  $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$ . Zeigen Sie:

- (a) Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.
- (b) Die Funktion  $g$  ist in  $(0,0)$  nicht stetig, aber  $g$  ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d.h. für jedes feste  $\varphi \in \mathbb{R}$  gilt  $g(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \rightarrow g(0,0)$  für  $r \rightarrow 0+$ .
- (c) Die Funktion  $h$  ist in  $(0,0)$  nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x,y) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x,y)$$

existieren und stimmen mit  $h(0,0)$  überein.

### Aufgabe 26: [ Parametrisierung Regulärer Kurven **T** ]

Die Kurve  $\gamma : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

gegeben. Ist  $\gamma$  eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge  $L(\gamma)$  und ggf. ihre Parameterisierung nach Bogenlänge.

### Aufgabe 27:

Die Kurve  $\eta : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei durch

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \quad \forall t \in (-1,1)$$

gegeben. Ist  $\eta$  eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge  $L(\eta)$  und ggf. ihre Parameterisierung nach Bogenlänge.

### Aufgabe 28: [ Partielle Ableitungen **T** ]

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

- (a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x,y,z) = (xy^2z^3e^{xy^2z^3}, x^2e^y + \sin(x))$
- (b)  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g(x,y) = (ye^x + x \sinh(y), y^4 + 3x^2 \sin(y), 4y - x^3)$
- (c)  $h : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $h(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos(\varphi) \cos(\vartheta), r \sin(\varphi) \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta))$

**Aufgabe 29:**

Betrachten Sie die Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , welche durch

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  gegeben ist.

- (a) Zeigen Sie, dass  $g$  auf  $\mathbb{R}^2$  stetig ist.
- (b) Berechnen Sie für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  alle partiellen Ableitungen von  $g$ .
- (c) Sind die partiellen Ableitungen von  $g$  im Punkt  $(0, 0)$  stetig?
- (d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung  $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0)$  für jede Richtung  $\vec{v}$ , für die das möglich ist.  
Für welche  $\vec{v}$  gilt  $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0) = (\nabla g(0, 0)) \cdot \vec{v}$ ?

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 27 und 29 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.