Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

SS23
26.05.2023

Höhere Mathematik II, Musterlösung

5. Übungsblatt

Aufgabe 25:

(a) Klar: f ist stetig in jedem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen.

Sei $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) \to (0,0)$ und $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$|f(x_k, y_k)| = \left|\frac{x_k y_k^2}{x_k^2 + y_k^2}\right| \overset{\text{A.-G.-Mittel}}{\leq} |y_k| \frac{x_k^2 + y_k^2}{2(x_k^2 + y_k^2)} = \frac{|y_k|}{2} \to 0 = f(0,0)$$

für $k \to \infty$. Damit ist f stetig in $(0,0)$.

(b) Die Funktion g ist unstetig in $(0,0)$, denn $(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$, aber

$$g\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2} \not\to 0 = g(0,0)$$

für $k \to \infty$.

Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ beliebig. Angenommen, $\cos(\varphi) = 0$. Dann ist $\sin(\varphi) \neq 0$ und

$$g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \frac{r^3 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi) + r^4\sin^4(\varphi)} = 0 \to 0 = g(0,0)$$

für $r \to 0+$. Ist $\cos(\varphi) \neq 0$, so ist trotzdem

$$g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \frac{r^3 \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi) + r^4\sin^4(\varphi)} = r\frac{\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi) + r^2\sin^4(\varphi)} \to 0 = g(0,0)$$

für $r \to 0+$.

(c) Die Funktion h ist unstetig in $(0,0)$, denn $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$, aber

$$h\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = 1 \not\to 0 = h(0,0)$$

für $k \to \infty$.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \to \frac{0}{0 + \underbrace{(x-0)^2}_{>0}} = 0$$

für $y \to 0$. Ist $x = 0$, so ist $h(x,y) = 0 \to 0$ für $y \to 0$. Also gilt in der Tat $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y) = h(0,0) = 0$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt auch $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y) = h(0,0) = 0$.

Aufgabe 26:
Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{2}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \frac{4}{\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \neq 0$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Deshalb ist γ regulär. Ferner gilt:

$$\psi(t) := \int_0^t \|\dot{\gamma}(s)\| \, \mathrm{d}s = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} t$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Es ist also $L(\gamma) = \psi(2\pi) = 2\sqrt{\pi^2 + 4}$. Die Parameterisierung nach Weglänge von γ ist durch

$$\gamma \circ \psi^{-1}(s) = \gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{4 + \pi^2}} s\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} s\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} s\right) \\ \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}} s \end{pmatrix}$$

für alle $s \in [0, 2\sqrt{\pi^2 + 4}]$ gegeben.

Aufgabe 27:
Es gilt

$$\dot{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ 1 \\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \|\dot{\eta}(t)\| = \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + 1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0$$

für alle $t \in (-1, 1)$. Deshalb ist η regulär. Ferner gilt:

$$\psi(t) := \int_{-1}^t \|\dot{\eta}(s)\| \, \mathrm{d}s = \sqrt{2} \left(\arcsin(t) - \arcsin(-1)\right) = \sqrt{2} \left(\arcsin(t) + \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $t \in [-1, 1]$. Es ist also $L(\eta) = \psi(1) = \sqrt{2}\pi$. Die Umkehrfunktion $\psi^{-1} : [0, \sqrt{2}\pi]$ ist durch

$$\psi^{-1}(s) = \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

für alle $s \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben. Die Parameterisierung nach Weglänge von η ist dann durch

$$\eta \circ \psi^{-1}(s) = \eta\left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \\ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}$$

für alle $s \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben.

Aufgabe 28:
(a) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= ((1 + xy^2z^3)y^2z^3e^{xy^2z^3}, 2xe^y + \cos(x)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= (2xyz^3(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, x^2e^y) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= (3xy^2z^2(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, 0) \end{aligned}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= (ye^x + \sinh(y), 6x\sin(y), -3x^2)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (e^x + x\cosh(y), 4y^3 + 3x^2\cos(y), 4)\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial r}(r,\varphi,\vartheta) &= (\cos(\varphi)\cos(\vartheta), \sin(\varphi)\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))\\ \frac{\partial h}{\partial \varphi}(r,\varphi,\vartheta) &= (-r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))\\ \frac{\partial h}{\partial \vartheta}(r,\varphi,\vartheta) &= (-r\cos(\varphi)\sin(\vartheta), -r\sin(\varphi)\sin(\vartheta), r\cos(\vartheta))\end{aligned}$$

für alle $(r,\varphi,\vartheta) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 29:

(a) Klar: g ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen $(x,y) \neq (0,0)$. Es ist $|\sin(x)| = \sin(|x|)$ für alle $x \in [-\pi,\pi]$. Ferner gilt $\sin(x) \leq x$ für alle $x \in [0,\infty)$. Es folgt

$$\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right| = \frac{\sin(|x^3+y^3|)}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{\overbrace{|x|^3+|y|^3}^{\leq 2\|(x,y)\|_\infty^3}}{\underbrace{x^2+y^2}_{\geq \|(x,y)\|_\infty^2}} \leq 2\,\|(x,y)\|_\infty$$

für alle $(x,y) \neq (0,0)$ mit $\|(x,y)\|_\infty \leq 1$. Deshalb gilt mit den Ergebnissen der Aufgabe 20 in der Tat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$. Also ist g stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Wegen $g(x,y) = g(y,x)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$, reicht es aus, lediglich $\frac{\partial g}{\partial x}$ auszurechnen. Es ist dann $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Für $(x,y) \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)\cos(x^3+y^3) - 2x\sin(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0,0)$ gilt hingegen

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h^3)}{h^3} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{3h^2\cos(h^3)}{3h^2} = 1.$$

(c) Betrachte $(x_k,y_k) := (0,\frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_k,y_k) = 0\frac{1}{k^4} = 0 \not\to 1 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0).$$

Also sind $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ unstetig bei $(0,0)$.

(d) Sei $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(t\vec{v}) - g((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^3(v_x^3 + v_y^3))}{t^3(v_x^2 + v_y^2)} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{3t^2(v_x^3 + v_y^3)\cos(t^3(v_x^3 + v_y^3))}{3t^2(v_x^2 + v_y^2)} = \frac{v_x^3 + v_y^3}{v_x^2 + v_y^2}
\end{aligned}$$

Ferner ist $(\nabla g)(0,0) \cdot \vec{v} = v_x + v_y$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = (\nabla g)(0,0) \cdot \vec{v} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{v_x^3 + v_y^3}{v_x^2 + v_y^2} = v_x + v_y \\
&\Leftrightarrow \quad v_x^3 + v_y^3 = v_x^3 + v_y^3 + v_x^2 v_y + v_x v_y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad -v_x^2 v_y = v_x v_y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad v_x = 0 \vee v_y = 0 \vee v_x = -v_y
\end{aligned}$$