

## Höhere Mathematik II, Musterlösung

### 6. Übungsblatt

#### Aufgabe 30:

Wir berechnen vorbereitend für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(y)}{1+x^2} & (2 + \arctan(x)) \cos(y) \\ -e^x \cos(y) & e^x \sin(y) \end{pmatrix}$$

- (a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes aus Abschnitt 19.14 der Vorlesung sicher. Es ist in der Tat

$$f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(0)) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -e^0 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} &\begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow \cdot (-\frac{2}{3}) \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ | \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist  $f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen  $U$  und  $V$ . Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion  $f^{-1}: V \rightarrow U$

$$(f^{-1})' \left( \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = (f^{-1})' \left( f \left( 0, \frac{\pi}{4} \right) \right) = [f' \left( 0, \frac{\pi}{4} \right)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

- (b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(f'(x, y)) = \frac{\sin^2(y)e^x}{1+x^2} + e^x(2 + \arctan(x)) \cos^2(y)$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Wegen  $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$  und  $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$  werden die  $\sin^2$  bzw.  $\cos^2$ -Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist  $\det(f'(x, y)) > 0$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h.  $f$  ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$f(x, y + 2\pi) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x)) \sin(y + 2\pi) \\ -e^x \cos(y + 2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x)) \sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix} = f(x, y)$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ist  $f$  nicht injektiv.

### Aufgabe 31:

(a) Klar:  $f$  ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Ferner gilt

$$\left| \frac{y^3 - x^2y}{x^2 + y^2} \right| = |y| \left| \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \frac{y^2 + x^2}{x^2 + y^2} = |y|$$

für alle  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Deshalb gilt in der Tat  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ . Also ist  $f$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Für  $(x, y) \neq 0$  gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{-2x(x^2 + y^2) - (y^2 - x^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 + 4x^2y^2 - x^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Im Punkt  $(0, 0)$  gilt hingegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2} = 1.$$

(c) Betrachte  $(x_k, y_k) := (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$  für  $k \rightarrow \infty$ . Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) = -\frac{4\frac{1}{k^4}}{4\frac{1}{k^4}} = -1 \not\rightarrow 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Also ist  $\frac{\partial f}{\partial x}$  unstetig bei  $(0, 0)$ .

Betrachte  $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0)$  für  $k \rightarrow \infty$ . Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) = -\frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = -1 \not\rightarrow 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Also ist auch  $\frac{\partial f}{\partial y}$  unstetig bei  $(0, 0)$ .

(d) Sei  $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Nach Definition gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\vec{v}) - f((0, 0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3(v_y^3 - v_x^2v_y)}{t^3(v_x^2 + v_y^2)} = \frac{v_y^3 - v_x^2v_y}{v_x^2 + v_y^2}$$

Ferner ist  $(\nabla f)(0, 0) \cdot \vec{v} = v_y$ . Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = (\nabla f)(0, 0) \cdot \vec{v} &\Leftrightarrow \frac{v_y^3 - v_x^2v_y}{v_x^2 + v_y^2} = v_y \\ &\Leftrightarrow v_y^3 - v_x^2v_y = v_x^2v_y + v_y^3 \\ &\Leftrightarrow v_x^2v_y = 0 \\ &\Leftrightarrow v_x = 0 \vee v_y = 0 \end{aligned}$$

### Aufgabe 32:

- (a) Klar:  $g$  ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Es ist  $|\sin(x)| = \sin(|x|)$  für alle  $x \in [-\pi, \pi]$ . Ferner gilt  $\sin(x) \leq x$  für alle  $x \in [0, \infty)$ . Es folgt

$$\left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right| = \frac{\sin(|x^3 + y^3|)}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{\overbrace{|x|^3 + |y|^3}^{\leq 2\|(x,y)\|_\infty^3}}{\underbrace{x^2 + y^2}_{\geq \|(x,y)\|_\infty^2}} \leq 2\|(x,y)\|_\infty$$

für alle  $(x, y) \neq (0, 0)$  mit  $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$ . Deshalb gilt mit den Ergebnissen der Aufgabe 20 in der Tat  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0 = g(0, 0)$ . Also ist  $g$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$ .

- (b) Wegen  $g(x, y) = g(y, x)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ , reicht es aus, lediglich  $\frac{\partial g}{\partial x}$  auszurechnen. Es ist dann  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(y, x)$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Für  $(x, y) \neq 0$  gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) \cos(x^3 + y^3) - 2x \sin(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Im Punkt  $(0, 0)$  gilt hingegen

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h, 0) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h^3)}{h^3} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 \cos(h^3)}{3h^2} = 1.$$

- (c) Betrachte  $(x_k, y_k) := (0, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0)$  für  $k \rightarrow \infty$ . Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k) = 0 \frac{1}{k^4} = 0 \not\rightarrow 1 = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0).$$

Also sind  $\frac{\partial g}{\partial x}$  und  $\frac{\partial g}{\partial y}$  unstetig bei  $(0, 0)$ .

- (d) Sei  $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t\vec{v}) - g((0, 0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3(v_x^3 + v_y^3))}{t^3(v_x^2 + v_y^2)} \\ &\stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2(v_x^3 + v_y^3) \cos(t^3(v_x^3 + v_y^3))}{3t^2(v_x^2 + v_y^2)} = \frac{v_x^3 + v_y^3}{v_x^2 + v_y^2} \end{aligned}$$

Ferner ist  $(\nabla g)(0, 0) \cdot \vec{v} = v_x + v_y$ . Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0) = (\nabla g)(0, 0) \cdot \vec{v} &\Leftrightarrow \frac{v_x^3 + v_y^3}{v_x^2 + v_y^2} = v_x + v_y \\ &\Leftrightarrow v_x^3 + v_y^3 = v_x^3 + v_y^3 + v_x^2 v_y + v_x v_y^2 \\ &\Leftrightarrow -v_x^2 v_y = v_x v_y^2 \\ &\Leftrightarrow v_x = 0 \vee v_y = 0 \vee v_x = -v_y \end{aligned}$$

### Aufgabe 33:

Wir berechnen vorbereitend für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(y)}{1+x^2} & (2 + \arctan(x)) \cos(y) \\ -e^x \cos(y) & e^x \sin(y) \end{pmatrix}$$

- (a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes aus Abschnitt 19.14 der Vorlesung sicher.  
Es ist in der Tat

$$f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(0)) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -e^0 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ + \end{array} &\sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ + \end{array} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ | \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ | \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ | \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist  $f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen  $U$  und  $V$ . Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion  $f^{-1}: V \rightarrow U$

$$(f^{-1})'\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (f^{-1})'\left(f\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right) = [f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

- (b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(f'(x, y)) = \frac{\sin^2(y)e^x}{1+x^2} + e^x(2 + \arctan(x)) \cos^2(y)$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Wegen  $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$  und  $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$  werden die  $\sin^2$  bzw.  $\cos^2$ -Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist  $\det(f'(x, y)) > 0$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h.  $f$  ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$f(x, y + 2\pi) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x)) \sin(y + 2\pi) \\ -e^x \cos(y + 2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x)) \sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix} = f(x, y)$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ist  $f$  nicht injektiv.

### Aufgabe 34:

Wir berechnen vorbereitend für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$g'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(x) \cos(y) & -\cosh(x) \sin(y) \\ \cosh(x) \sin(x) & \sinh(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$

- (a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes aus Abschnitt 19.14 der Vorlesung sicher.  
Es ist in der Tat

$$g\left(\log(2), \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cosh(\log(2)) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sinh(\log(2)) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$g' \left( \log(2), \frac{\pi}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot \frac{4}{5} \\ | \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist  $g' \left( \log(2), \frac{\pi}{2} \right)$  in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen  $U$  und  $V$ . Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion  $g^{-1} : V \rightarrow U$

$$(g^{-1})' \left( 0, \frac{3}{4} \right) = (g^{-1})' \left( g \left( \log(2), \frac{\pi}{2} \right) \right) = \left[ g' \left( \log(2), \frac{\pi}{2} \right) \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(g'(x, y)) = \sinh^2(x) \cos^2(y) + \cosh^2(x) \sin^2(y)$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Wegen  $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$  und  $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$  werden die  $\sin^2$  bzw.  $\cos^2$ -Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist  $\det(g'(x, y)) > 0$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $x \neq 0$ . Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h.  $g$  ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$g(x, y + 2\pi) = \begin{pmatrix} \cosh(x) \cos(y + 2\pi) \\ \sinh(x) \sin(y + 2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(x) \cos(y) \\ \sinh(x) \sin(y) \end{pmatrix} = g(x, y)$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ist  $g$  nicht injektiv.

### Aufgabe 35:

(a) Da alle partielle Ableitungen stetig sind, ist  $f$  differenzierbar und es gilt für alle  $(x, y) \in D$ :

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ -2x \sin(x^2 + y) & -\sin(x^2 + y) \\ e^x & 0 \end{pmatrix}$$

Ebenfalls ist  $g$  differenzierbar und es gilt für alle  $(x, y, z) \in E$ :

$$g'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & z & y + \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

(b) Für alle  $(x, y) \in D$  gilt

$$g'(f(x, y)) = \begin{pmatrix} xy & e^x & \cos(x^2 y^2) + e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x, y) &= g'(f(x, y)) \cdot f'(x, y) = \begin{pmatrix} y - 2xe^x \sin(x^2 + y) + 1 + e^x \cos(x^2 + y) & x - e^x \sin(x^2 + y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x(\cos(x^2 + y) - 2x \sin(x^2 + y)) + 1 & x - e^x \sin(x^2 + y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle  $(x, y) \in D$ .

(c) Direkte Rechnung ergibt

$$(g \circ f)(x, y) = xy + e^x \cos(x^2 + y) + x$$

für alle  $(x, y) \in D$ . Dementsprechend ist

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} & \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= (y + e^x \cos(x^2 + y) - 2xe^x \sin(x^2 + y) + 1 \quad x - e^x \sin(x^2 + y)) \\ &= (y + e^x(\cos(x^2 + y) - 2x \sin(x^2 + y)) + 1 \quad x - e^x \sin(x^2 + y)) \end{aligned}$$

für alle  $(x, y) \in D$ .

### Aufgabe 36:

(a) Da alle partielle Ableitungen stetig sind, sind  $f$ ,  $g$  und  $h$  differenzierbar und es gilt für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f'(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}, \\ g'(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}, \text{ sowie} \\ h'(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ \cosh(x) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$\begin{aligned} g'(f(x, y)) &= \begin{pmatrix} y^2 \cos(x^2 y^2) & x^2 \cos(x^2 y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \text{ sowie} \\ h'(g(x, y)) &= \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)} \cos(e^{x+y}) & -e^{\sin(xy)} \sin(e^{x+y}) \\ \cosh(\sin(xy)) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dementsprechend ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel

$$(g \circ f)'(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 \cos(x^2 y^2) & 2x^2 y \cos(x^2 y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \text{ sowie}$$

$$\begin{aligned} (h \circ g)'(x, y) &= h'(g(x, y)) \cdot g'(x, y) \\ &= \begin{pmatrix} y \cos(xy) \cos(e^{x+y}) e^{\sin(xy)} - e^{x+y} e^{\sin(xy)} \sin(e^{x+y}) & x \cos(xy) \cos(e^{x+y}) e^{\sin(xy)} - e^{x+y} e^{\sin(xy)} \sin(e^{x+y}) \\ y \cos(xy) \cosh(\sin(xy)) & x \cos(xy) \cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

(c) Direkte Rechnung ergibt

$$(g \circ f)(x, y) = (\sin(x^2 y^2) \quad e^{x^2+y^2}), \text{ sowie}$$

$$(h \circ g)(x, y) = (e^{\sin(xy)} \cos(e^{x+y}) \quad \sinh(\sin(xy))).$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Dementsprechend ist

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)'(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial x} & \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial y} \\ \frac{\partial(g \circ f)_2}{\partial x} & \frac{\partial(g \circ f)_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\
 &= (y + e^x \cos(x^2 + y) - 2xe^x \sin(x^2 + y) + 1 \quad x - e^x \sin(x^2 + y)) \\
 &= (y + e^x(\cos(x^2 + y) - 2x \sin(x^2 + y)) + 1 \quad x - e^x \sin(x^2 + y)), \text{ sowie}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (h \circ g)'(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(h \circ g)_1}{\partial x} & \frac{\partial(h \circ g)_1}{\partial y} \\ \frac{\partial(h \circ g)_2}{\partial x} & \frac{\partial(h \circ g)_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} y \cos(xy) e^{\sin(xy)} \cos(e^{x+y}) - e^{\sin(xy)} e^{x+y} \sin(e^{x+y}) & x \cos(xy) e^{\sin(xy)} \cos(e^{x+y}) - e^{\sin(xy)} e^{x+y} \sin(e^{x+y}) \\ y \cos(xy) \cosh(\sin(xy)) & x \cos(xy) \cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

für alle  $(x, y) \in D$ .