Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

SS23
11.06.2023

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösung zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 36:

(a) Klar: $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Ferner gilt $F(0,0,-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$, sowie

$$\begin{aligned} F'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3yz+3x^2 & -3xz-3y^2 & 3z^2+4z-3xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere ist $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (vgl. Abschnitt 19.15 der Vorlesung), existieren U, V und φ mit den geforderten Eigenschaften. Für die Ableitung φ' gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(x,y) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,\varphi(x,y)) \\ &= -\frac{1}{3\varphi^2(x,y)+4\varphi(x,y)-3xy} \cdot \begin{pmatrix} -3y\varphi(x,y)+3x^2 & -3x\varphi(x,y)-3y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in U$.

(b) Definiere $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$G(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-u^2+v^2 \\ x^2+2y^2-3u^2+4v^2-1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Die Aufgabe besteht offenbar darin, die Gleichung $G(x,y,u,v) = \vec{0}$ in der Nähe des Punktes $(x,y,u,v) = (0,0,1,1)$ nach (u,v) aufzulösen.

Klar: $G \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Ferner gilt

$$G(0,0,1,1) = \begin{pmatrix} 0^2+0^2-(1)^2+(1)^2 \\ 0^2+2\cdot 0^2-3\cdot(1)^2+4\cdot(1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\begin{aligned} G'(x,y,u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial v}(x,y,u,v) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial v}(x,y,u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Versuche die (2×2)-Matrix $\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)$ zu invertieren:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1) \middle| I_2\right) &\sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-1) \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ | \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\sim \left(I_2 \middle| \left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)\right)^{-1}\right) \end{aligned}$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (vgl. Abschnitt 19.15 der Vorlesung) existiert eine offene Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, eine offene Menge $(1,1) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$, sowie ein $\varphi \in C^1(U,V)$ mit

$$G(x,y,u,v) = 0 \Leftrightarrow (u,v) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$$

für alle $(x,y) \in U$ und alle $(u,v) \in V$. Für die Ableitung φ' gilt

$$\varphi'(x,y) = -\left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(x,y,\varphi(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,\varphi(x,y))$$

für alle $(x,y) \in U$. Insbesondere gilt für $(x,y) = (0,0)$

$$\varphi'(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $u'(0,0) = (0,0) = v'(0,0)$.

Aufgabe 37:

(a) Klar: $F \in C^1(D)$. Ferner gilt

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0, 1\right) = \frac{1}{1+0+1} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + 0 + 1 - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

sowie

$$\begin{aligned} F'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y+z-1} & -\frac{1}{(1+y+z)^2} + \frac{1}{x+y+z-1} & -\frac{1}{(1+y+z)^2} + \frac{1}{x+y+z-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in D$. Insbesondere ist

$$\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0, 1\right) = -\frac{1}{(1+0+1)^2} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}} + 0 + 1 - 1} = \sqrt{e} - \frac{1}{4} \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (vgl. Abschnitt 19.15 der Vorlesung), existieren U, V und φ mit den geforderten Eigenschaften.

$\square$

(b) Für die Ableitung φ' gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,\varphi(x,y)) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{(1+y+\varphi(x,y))^2} - \frac{1}{x+y+\varphi(x,y)-1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y+\varphi(x,y)-1} & -\frac{1}{(1+y+\varphi(x,y))^2} + \frac{1}{x+y+\varphi(x,y)-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{x+y+\varphi(x,y)-1}{(1+y+\varphi(x,y))^2} - 1} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in U$. Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - \varepsilon, \frac{1}{\sqrt{e}} + \varepsilon\right) \times (-\varepsilon, +\varepsilon) =: U_1 \times U_2 \subseteq U$$

(dies funktioniert, weil U offen ist und $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right) \in U$). Nach dem Hauptsatz der Analysis (vgl. Abschnitt 11.10 in HM1) gilt für jedes $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, t) \mathrm{d}t = \varphi(x, 0) - y$$

Setze $\varphi_1(x) := \varphi(x, 0)$ für alle $x \in U_1$. Klar: $\varphi_1 \in C^1(U_1)$ und $\varphi(x, y) = \varphi_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$. Bleibt nachzuweisen, dass φ_1 streng monoton fallend ist. Betrachte dazu

$$\varphi_1'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, 0) = \frac{1}{\frac{x+0+\varphi(x,0)-1}{(1+0+\varphi(x,0))^2} - 1} = \frac{1}{\frac{x+\varphi_1(x)-1}{(1+\varphi_1(x))^2} - 1}$$

für alle $x \in U_1$. Insbesondere ist, wegen $\varphi_1\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right) = 1$, für $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ist

$$\varphi'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{\sqrt{e}}+1-1}{(1+1)^2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{4\sqrt{e}} - 1}.$$

Das Vorzeichen des Nenners ist wegen $1 < \sqrt{e}$ bzw. $\frac{1}{4\sqrt{e}} < \frac{1}{4}$ negativ. Damit ist $\varphi'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) < 0$. Da φ_1' stetig ist, lässt sich ε nötigenfalls verkleinern, damit $\varphi'(x) < 0$ für alle $x \in U_1$ gilt. Also ist φ_1 in der Tat streng monoton fallend auf einer offenen Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1$.

□

Aufgabe 38:

(a) Sei $\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k$ beliebig. Da $|||\cdot|||$ eine Norm ist, gilt für sie die Dreiecksungleichung. Es folgt

$$|||\vec{x}||| = \left|\left|\left|\sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k\right|\right|\right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \, |||\vec{e}_k||| \leq \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |||\vec{e}_j||| \sum_{k=1}^n |x_k| = \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |||\vec{e}_j||| \, \|\vec{x}\|_1 .$$

Die Konstante $C_1 := \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |||\vec{e}_j|||$ liefert also das Gewünschte.

(b) Wir zeigen zunächst, dass $|||\cdot|||$ stetig ist. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt

$$\left| |||\vec{x}||| - |||\vec{y}||| \right| \leq |||\vec{x} - \vec{y}||| \leq C_1 \|\vec{x} - \vec{y}\|_1 \overset{\text{A. 20}}{\leq} C_1 C_{12} \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Also gilt tatsächlich

$$\lim_{\vec{y} \to \vec{x}} |||\vec{y}||| = |||\vec{x}|||$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Genauso sieht man ein, dass $\|\cdot\|_1$ stetig ist.

Nun gilt

$$\|\vec{x}\|_1 \leq C_2 |||\vec{x}||| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} \leq \frac{|||\vec{x}|||}{\|\vec{x}\|_1} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \left\{\vec{0}\right\} \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} \leq |||\vec{x}||| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|\vec{x}\|_1 = 1.$$

Setze $D := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\|_1 = 1\} = \|\cdot\|_1^{-1}(\{1\})$. Da $\{1\}$ abgeschlossen und $\|\cdot\|_1$ nach Obigem stetig ist, ist D abgeschlossen (vgl. Abschnitt 19.3 der Vorlesung). Ferner gilt für jedes $\vec{x} \in D$

$$\|\vec{x}\| \overset{\text{A. 20}}{\leq} C_{2\infty} C_{\infty 1} \underbrace{\|\vec{x}\|_1}_{=1} .$$

Also ist D beschränkt. Damit ist D nach Abschnitt 19.18 der Vorlesung kompakt. Für die stetige Abbildung $|||\cdot|||$ gilt dann, dass ein $\vec{x}_0 \in D$ existiert mit

$$\inf_{\vec{x}\in D} |||\vec{x}||| = |||\vec{x}_0|||.$$

Angenommen, $\inf_{\vec{x}\in D} |||\vec{x}||| = 0$. Dann ist $|||\vec{x}_0||| = 0$. Als Norm ist $|||\cdot|||$ definit, also ist $\vec{x}_0 = \vec{0}$. Dann ist aber $\|\vec{x}_0\|_1 = 0 \neq 1$ und $\vec{x}_0 \notin D$. Dies ist ein Widerspruch, also muss $\inf_{\vec{x}\in D} |||\vec{x}||| > 0$ gelten. Wähle

$$C_2 := \frac{1}{\inf_{\vec{x}\in D} |||\vec{x}|||}.$$

□

Aufgabe 39:

(a) Klar: $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne f'. Es ist

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 & x-2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung ist $f'(x_0,y_0) = \vec{0}$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von f. Also ist $(x_0,y_0) = (2,-1)$ der einzige kritische Punkt von f.

Berechne nun $H_f(x_0,y_0)$. Es ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Untersuche $H_f(x_0,y_0) =: A$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit. Das charakteristische Polynom χ_A ist durch

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also ist $\operatorname{spec}(A) = \{1,-1\}$. Nach der Charakterisierung aus Abschnitt 18.9 der Vorlesung ist also A indefinit. Nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung hat f in (x_0,y_0) kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt (siehe Abbildung 1).

(b) Klar: $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne g'. Es ist

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2 - 3y & -3x + 6y^2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung ist $g'(x_0,y_0) = \vec{0}$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von g. Berechne diese kritischen Punkte:

$$\begin{aligned} g'(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (6x^2 - 3y = 0) \wedge (-3x + 6y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 2y^2) \wedge (6x^2 = 3y) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y^2) \wedge (24y^4 = 3y) \Leftrightarrow (x = y = 0) \vee \left(x = y = \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Also sind $(x_0,y_0) = (0,0)$ und $(x_1,y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ genau die kritischen Punkte von g.

Berechne nun H_g. Es ist

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

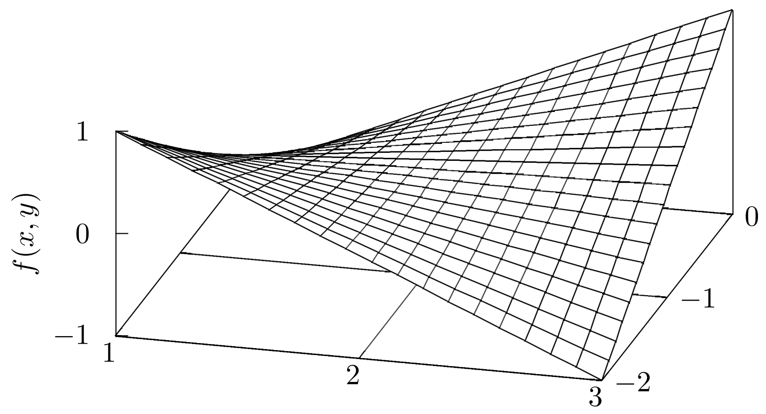

Abbildung 1: Sattelpunkt von f

- Untersuche $H_g(x_0, y_0) =: A$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom χ_A ist durch

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3^2 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also ist $\operatorname{spec}(A) = \{3, -3\}$. Nach der Charakterisierung aus Abschnitt 18.9 der Vorlesung ist also A indefinit. Nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung hat g in (x_0, y_0) kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt (siehe Abbildung 2).

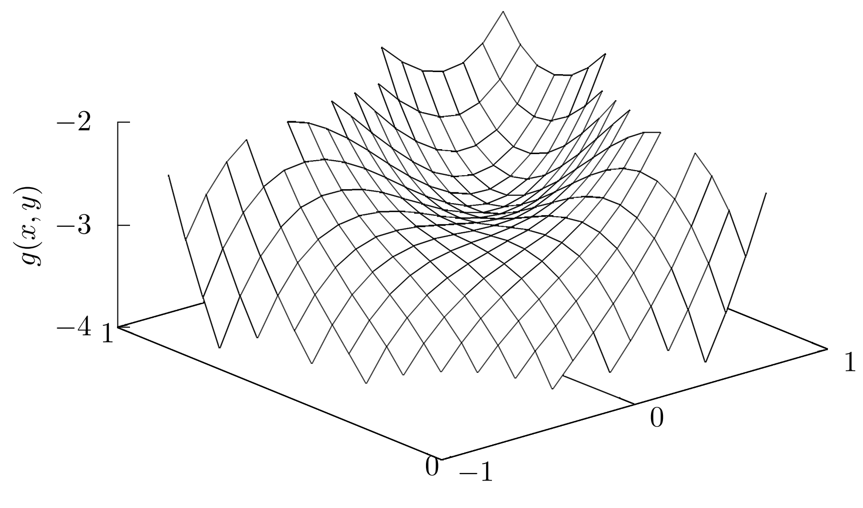

Abbildung 2: Sattelpunkt von g

- Untersuche $H_g(x_1, y_1) =: B$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom χ_B ist durch

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2 - 3^2 = (3-\lambda)(9-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also ist $\operatorname{spec}(B) = \{3, 9\}$. Nach der Charakterisierung aus Abschnitt 18.9 der Vorlesung ist also B positiv definit. Nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung hat g in (x_1, y_1) ein lokales Minimum (siehe Abbildung 3).

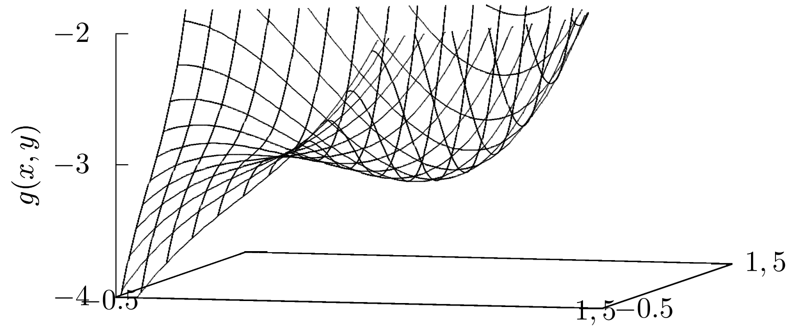

Abbildung 3: Lokales Minimum von g

(c) Klar: $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne h'. Es ist

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = 2e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1 - x(2x+2y+3) & 1 - y(2x+2y+3) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung ist $h'(x_0, y_0) = \vec{0}$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von h. Berechne diese kritischen Punkte:

$$\begin{aligned} h'(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(2x+2y+3) = y(2x+2y+3) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y \neq 0) \wedge (x(2x+2x+3) = 1) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y \neq 0) \wedge (x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y) \wedge \left(x \in \left\{ -\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{1}{4}}, -\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{1}{4}} \right\} \right) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = y) \wedge \left(x \in \left\{ -1, \frac{1}{4} \right\} \right) \end{aligned}$$

Also sind $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ und $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ genau die kritischen Punkte von h.

Berechne nun H_h. Es ist

$$\begin{aligned} H_h(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= 2e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 4x^3 + 4x^2y + 6x^2 - 6x - 2y - 3 & 4x^2y + 4xy^2 + 6xy - 2x - 2y \\ 4x^2y + 4xy^2 + 6xy - 2x - 2y & 4y^3 + 4xy^2 + 6y^2 - 2x - 6y - 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} H_h(x,x) &= 2e^{-2x^2}\begin{pmatrix} 8x^3+6x^2-8x-3 & 8x^3+6x^2-4x \\ 8x^3+6x^2-4x & 8x^3+6x^2-8x-3 \end{pmatrix} \\ &= 2e^{-2x^2}\begin{pmatrix} 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)-3 & 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) \\ 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) & 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$H_h(x_0,y_0) = \frac{2}{e^2}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{=:A} \qquad \text{und} \qquad H_h(x_1,y_1) = -\frac{1}{\sqrt[8]{e}}\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}}_{=:B}.$$

- Untersuche A durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom χ_A ist durch

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 2^2 = (1-\lambda)(5-\lambda)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also ist $\operatorname{spec}(A) = \{1, 5\}$. Nach der Charakterisierung aus Abschnitt 18.9 der Vorlesung ist also A positiv definit. Damit ist auch $H_h(x_0, y_0)$ positiv definit. Nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung hat h in (x_0, y_0) ein lokales Minimum (siehe Abbildung 4).

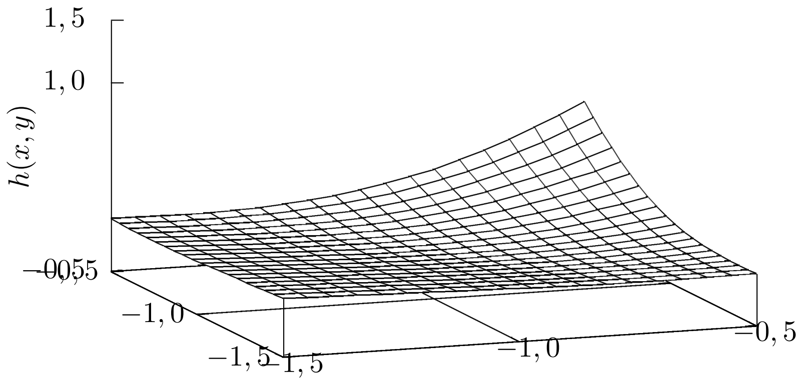

Abbildung 4: Lokales Minimum von h

- Untersuche B durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom χ_B ist durch

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 1 \\ 1 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2 - 1^2 = (8-\lambda)(10-\lambda)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also ist $\operatorname{spec}(B) = \{8, 10\}$. Nach der Charakterisierung aus Abschnitt 18.9 der Vorlesung ist also B positiv definit. Damit ist $H_h(x_1, y_1)$ negativ definit. Nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung hat h in (x_1, y_1) ein lokales Maximum (siehe Abbildung 5).

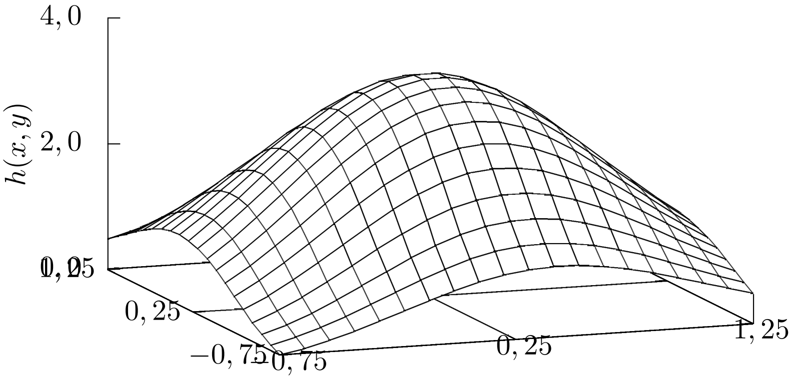

Abbildung 5: Lokales Maximum von h

Aufgabe 40:
Für $\vec{x} = (2,1)$ und $\vec{y} = (4,1)$ ist $\vec{x} \in A$ und $\vec{y} \in B$. Damit ist $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 2 \geq d(A,B)$. Ferner gilt für alle $\vec{x} = (x_1, x_2) \in A$

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq x_1^2 + 2x_2^2 = 6 < 9,$$

also $\|\vec{x}\| < 3$. Ferner gilt für alle $\vec{y} \in B$ mit $\|\vec{y}\| > 5$

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq |\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| = \|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| > 5 - 3 = 2 \geq d(A,B).$$

Ist $\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 > 36$, so ist nach Obigem $\|\vec{y}\|^2 > 36 - \|\vec{x}\|^2 > 25$, also $\|\vec{y}\| > 5$ und $\|\vec{x} - \vec{y}\| > 2$. Betrachte $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\|^2$$

für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Klar: $F \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Ferner sei $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \\ y_1 + y_2 - 5 \end{pmatrix}$$

für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Ebenfalls klar: $G \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$. Nach obiger Rechnung gilt $F(x_1, x_2, y_1, y_2) > 4$ für alle $\|(x_1, x_2, y_1, y_2)\| > 6$ und $F(2,1,4,1) = 4$, wobei $G(2,1,4,1) = \vec{0}$ und $\|(2,1,4,1)\| = \sqrt{22} < 6$. Es folgt also

$$\inf\left\{F(\vec{v}) : \vec{v} \in \mathbb{R}^4 \wedge G(\vec{v}) = \vec{0}\right\} = \inf\left\{F(\vec{v}) : \vec{v} \in \overline{K}(\vec{0}, 6) \wedge G(\vec{v}) = \vec{0}\right\} = \inf_{\vec{v} \in S} F(\vec{v})$$

mit $S = G^{-1}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right) \cap \overline{K}(0,6)$. Da G stetig ist und $\left\{\vec{0}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, ist auch $G^{-1}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right)$ abgeschlossen. Nach Abschnitt 19.2 der Vorlesung ist $\overline{K}(\vec{0}, 6)$ abgeschlossen. Damit ist S beschränkt und abgeschlossen, also nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung kompakt. Ebenfalls nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung, existiert ein $\vec{v_0} \in S$ mit

$$F(\vec{v_0}) = \min_{\vec{v} \in S} F(\vec{v}).$$

Die gesuchten Vektoren sind also gerade $\vec{x}_0 = (v_1, v_2)$ bzw. $\vec{y}_0 = (v_3, v_4)$.
Die Stelle $\vec{v}$ des globalen Minimums von F unter der Nebenbedingung $G = \vec{0}$ ist natürlich auch eine Stelle eines lokalen Extremums von F unter der Nebenbedingung $G = \vec{0}$. Wir wenden die Multiplikatorenregel von Lagrange (vgl. Abschnitt 19.19 der Vorlesung) an, um diese zu identifizieren: Es ist

$$G'(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Wegen $G(x_1, x_2, y_1, y_2) = \vec{0} \Rightarrow x_1, x_2 \neq 0$, hat G' auf $G^{-1}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right)$ den vollen Rang 2. Es existiert $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$F'(x_1, x_2, y_1, y_2) = \vec{\lambda}^T G'(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

Zusammen mit der Nebenbedingung $G(x_1, x_2, y_1, y_2) = \vec{0}$ ergibt es die folgenden sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2(x_1 - y_1) &= 2x_1\lambda_1 && (1) \\ 2(x_2 - y_2) &= 4x_2\lambda_1 && (2) \\ -2(x_1 - y_1) &= \lambda_2 && (3) \\ -2(x_2 - y_2) &= \lambda_2 && (4) \\ x_1^2 + 2x_2^2 &= 6 && (5) \\ y_1 + y_2 &= 5 && (6) \end{aligned}$$

Wir wollen zunächst $\lambda_1 \neq 0$ einsehen: Wäre $\lambda_1 = 0$, dann folgte aus (1) und (2) $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$. Dann wäre mit (6) $x_1 = 5 - x_2$ und mit (5) $(5-x_2)^2 + 2x_2^2 = 6$, bzw. $x_2^2 - \frac{10}{3}x_2 + \frac{19}{3} = 0$. Wegen $\left(\frac{5}{3}\right)^2 < \frac{19}{3}$ hat diese Gleichung keine reellen Lösungen. Also ist in der Tat $\lambda_1 \neq 0$.
Einsetzen von (3) in (1) und (4) in (2) liefert

$$2x_1\lambda_1 = -\lambda_2 = 4x_2\lambda_1.$$

Da $\lambda_1 \neq 0$ nach Obigem, muss

$$x_1 = 2x_2 \qquad (7)$$

gelten. Einsetzen in (5) liefert $x_2^2 = 1$, also $x_2 \in \{-1, 1\}$. Differenzbildung von (3) und (4) liefert $(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1) = 0$. Einsetzen von (7) und (6) liefert $y_1 = \frac{5+x_2}{2}$. Wieder (6) liefert schließlich $y_2 = \frac{5-x_2}{2}$. Zusammenfassend ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 \\ x_2 &\in \{-1, 1\} \\ y_1 &= \frac{5 + x_2}{2} \\ y_2 &= \frac{5 - x_2}{2} \end{aligned}$$

Insgesamt also $\vec{v} \in \{(-2, -1, 2, 3), (2, 1, 3, 2)\}$. Wegen $F(-2, -1, 2, 3) = (-2-2)^2 + (-1-3)^2 = 32$ und $F(2, 1, 3, 2) = (2-3)^2 + (1-2)^2 = 2$ ist $\vec{v} = (2, 1, 3, 2)$ und $d(A, B) = \sqrt{F(\vec{v})} = \sqrt{2}$.
□

Aufgabe 41:
Sei $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Klar: $G \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist $S = G^{-1}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right)$. Da G stetig ist und $\left\{\vec{0}\right\}$ abgeschlossen, ist S abgeschlossen. Wegen $\|(x,y,z)\| = 1$ für jedes $(x,y,z) \in S$, ist S beschränkt. Nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung ist also S kompakt. Ebenfalls nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung, existieren ein $\vec{v}_1, \vec{v_2} \in S$ mit

$$f(\vec{v}_1) \leq f(\vec{v}) \leq f(\vec{v}_2)$$

für alle $\vec{v} \in S$. Damit ist die Existenz der globalen Extrema von f auf S gesichert.

Da jede Stelle eines globalen Extremums auch eine Stelle eines lokalen Extremums ist, bietet es sich an diese mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange (vgl. Abschnitt 19.19 der Vorlesung) zu identifizieren: Es ist

$$G'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Also kann $G'(x,y,z)$ nur für $x = y = z$ nicht den vollen Rang haben. Aber für jedes $(x,y,z) \in S$ gilt $x = y = z \Rightarrow x = y = z = 0$, was ein Widerspruch zu $\|(x,y,z)\| = 1$ darstellt. Also hat G' auf S den vollen Rang 2. Es existiert $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$f'(\vec{v}_i) = \vec{\lambda}^T G'(\vec{v}_i)$$

für $i \in \{1,2\}$. Zusammen mit der Nebenbedingung $G(\vec{v}_i) = 0$, ergibt es die folgenden fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned}
5 &= \lambda_1 + 2x\lambda_2 && (8)\\
1 &= \lambda_1 + 2y\lambda_2 && (9)\\
-3 &= \lambda_1 + 2z\lambda_2 && (10)\\
0 &= x + y + z && (11)\\
1 &= x^2 + y^2 + z^2 && (12)
\end{aligned}$$

Addition von (8), (9) und (10), sowie Ausnutzung von (11) liefert $3 = 3\lambda_1$, also

$$\lambda_1 = 1. \tag{13}$$

Einsetzen in (8) impliziert $2 = x\lambda_2$, also $\lambda_2 \neq 0$. Einsetzen von (13) in (9) liefert

$$y = 0. \tag{14}$$

Mit (11) folgt dann sofort

$$z = -x. \tag{15}$$

Durch (12) folgt

$$x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}. \tag{16}$$

Es ist also

$$\vec{v}_i \in \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

für $i \in \{1,2\}$. Es ist $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}$ und $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}$, also

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\\
\vec{v}_2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$