

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösung zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 42:

(a) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(\vec{x}) \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^{2\pi} (e^{\cos(t) \sin(t)}, \cos(t) \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin(t) - \sin(t) e^{\cos(t) \sin(t)} dt \\ &= \left[-\frac{1}{3} \cos^3(t) \right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{\pi} \sin(t) e^{\cos(t) \sin(t)} dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t) e^{\cos(t) \sin(t)} dt \\ &\stackrel{t=\tau+\pi}{=} \left[-\frac{1}{3} \cos^3(t) \right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{\pi} \sin(t) e^{\cos(t) \sin(t)} dt + \int_0^{\pi} \sin(\tau) e^{\cos(\tau) \sin(\tau)} d\tau = 0 \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2x = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Da \mathbb{R}^2 einfach zusammenhängend und f ein C^1 -Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 20.4 der Vorlesung, dass f ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab. Es ist

$$\gamma(0) = (0, 0), \quad \gamma\left(\frac{19}{4}\pi\right) = (-1, 2).$$

Wähle also $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{\gamma}(t) = t(-1, 2)$. Es gilt:

$$\int_{\gamma} f(\vec{x}) \cdot d\vec{s} = \int_{\tilde{\gamma}} f(\vec{x}) \cdot d\vec{s} = \int_0^1 f(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(t) dt = \int_0^1 4t^2 + 10t^2 dt = 14 \int_0^1 t^2 dt = \frac{8}{3} [t^3]_{t=0}^1 = \frac{14}{3}$$

Aufgabe 43:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) &= -15y^2 z e^{-xz} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) &= (-3x^2 - 5y^3 + x^3 z + 5xy^3 z) e^{-xz} = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) &= -15xy^2 = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. Da \mathbb{R}^3 einfach zusammenhängend und f ein C^1 -Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 20.4 der Vorlesung, dass f ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab. Es ist

$$\gamma(0) = (0, 0, 0), \quad \gamma(1) = (1, 0, 0).$$

Wähle also $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{\gamma}(t) = (t, 0, 0)$. Es gilt:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(\vec{x}) \cdot d\vec{s} = \int_{\tilde{\gamma}} f(\vec{x}) \cdot d\vec{s} = \int_0^1 f(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(t) dt = \int_0^1 2t dt = [t^2]_{t=0}^{t=1} = 1$$

(b) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(\vec{x}) \cdot d\vec{s} &= \int_0^{\log(2)} f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_0^{\log(2)} (\cosh(t), -\sinh(t), \sinh(t)) \cdot (\cosh(t), \sinh(t), \cosh(t)) dt \\ &= \int_0^{\log(2)} \cosh^2(t) - \sinh^2(t) + \sinh(t) \cosh(t) dt \\ &= \int_0^{\log(2)} 1 + \sinh(t) \cosh(t) dt = \log(2) + \frac{1}{2} [\sinh^2(t)]_{t=0}^{t=\log(2)} = \log(2) + \frac{9}{32} \end{aligned}$$

Aufgabe 44:

(a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned} \int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dy dx = - \int_0^1 \left[\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} dx - \int_0^1 \frac{1}{(2+x^2)^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= [\operatorname{Arsinh}(x)]_{x=0}^{x=1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} dx \\ &\stackrel{y=\frac{x}{\sqrt{2}}}{=} \operatorname{Arsinh}(1) - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} dy = \operatorname{Arsinh}(1) - [\operatorname{Arsinh}(y)]_{y=0}^{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \operatorname{Arsinh}(1) - \operatorname{Arsinh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \log(1 + \sqrt{2}) - \log\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \log\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{(x+y)^2} d(x, y) &= \int_1^2 \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} dy dx = - \int_1^2 \left[\frac{1}{x+y} \right]_{y=3}^{y=4} dx = \int_1^2 \frac{1}{x+3} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+4} dx \\ &= [\log(x+3)]_{x=1}^{x=2} - [\log(x+4)]_{x=1}^{x=2} = \log\left(\frac{5}{4}\right) - \log\left(\frac{6}{5}\right) = \log\left(\frac{25}{24}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 45:

(a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{x^2} \mathbb{1}_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}}(x, y) d(x, y) = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} [e^{x^2}]_{x=0}^{x=1} = \frac{e-1}{2} \end{aligned}$$

(b) Es ist:

$$\begin{aligned}
 B &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq y^2 + 1\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ((0 \leq x \leq 1) \vee (x > 1)) \wedge (0 \leq y \leq 1) \wedge (y \leq x \leq y^2 + 1)\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ((0 \leq y \leq x \leq 1) \vee ((1 < x \leq 2) \wedge (\sqrt{x-1} < y \leq 1)))\} \\
 &= \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}}_{=B_1} \cup \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 < x \leq 2) \wedge (\sqrt{x-1} < y \leq 1)\}}_{=B_2}
 \end{aligned}$$

Ferner ist $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Es folgt mit dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y dx dy &= \int_B x^2 y d(x, y) = \int_{B_1} x^2 y d(x, y) + \int_{B_2} x^2 y d(x, y) \\
 &= \int_0^1 \int_0^x x^2 y dy dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y dy dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx + \int_1^2 x^2 \frac{1 - (x-1)}{2} dx \\
 &= \frac{1}{10} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{10} + \frac{8}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{67}{120}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 46:

a) Um zu zeigen, dass \vec{v} ein Potentialfeld auf G ist verwenden wir die Verträglichkeitsbedingung (Satz 2 (iv)). Es ist \vec{v} ein C^1 Vektorfeld. Zunächst ist klar, dass $(0, \infty) \times (0, \infty)$ ein Gebiet ist. Wir prüfen also

$$\partial_y v_1 = \partial_y(x + 2xy) = 2x = \partial_x(x^2 + 1) = \partial_x v_2 \quad \text{auf } G$$

und damit ist \vec{v} ein Potentialfeld.

b) Wir suchen eine Funktion $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla \Phi = \vec{v}$. Ein Kandidaten für das Potential bestimmen wir durch integrieren der Komponenten das Potentialfeld. Es ist

$$\begin{aligned}
 \int v_1(x, y) dx &= \int x + 2xy dx = \frac{1}{2}x^2 + x^2y + C_1(y) \\
 \int v_2(x, y) dy &= \int x^2 + y dy = x^2y + \frac{1}{2}y^2 + C_2(x)
 \end{aligned}$$

Wir wählen $C_1(y) = \frac{1}{2}y^2$ und $C_2(x) = \frac{1}{2}x^2$, sodass

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y$$

und damit $\nabla \Phi = \vec{v}$.

Aufgabe 47:

a) \mathbb{R}^2 ist ein ein Sterngebiet und \vec{v} ein C^1 Vektorfeld. Daher ist \vec{v} ein Potentialfeld auf \mathbb{R}^2 genau dann wenn die Verträglichkeitesbedingungen erfüllt sind. Wir bestimmen also

$$\begin{aligned}
 \partial_y v_1 &= 2xg(xy) + (1 + 2xy)g'(xy) \\
 \partial_x v_2 &= 4xg(xy) + 2x^2g'(xy)y
 \end{aligned}$$

Indem wir beide Ausdrücke gleichsetzen finden wir

$$2xg(xy) + xg'(xy) = 4xg(xy) \Leftrightarrow g'(xy) = 2g(xy)$$

Die Bedingung an g ist erfüllt falls $g' = 2g$ was für $g \neq 0$ äquivalent zu

$$\partial_t \ln(g(t)) = 2$$

ist. Durch Integration finden wir

$$g(t) = Ce^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

für ein $C \in \mathbb{R}$. Die Nebenbedingung $g(0) = 2$ schießt den Fall $g \equiv 0$ aus und ist erfüllt falls $C = 2$. Nach Satz 2 der Vorlesung ist also für dieses g das Feld \vec{v} ein Potentialfeld.

- b) Wir bestimmen nun noch ein Potential zu diesem Feld. Wie in der vorangegangenen Aufgabe finden wir einen Kandidaten für das Potential, sodass $\nabla\Phi = \vec{v}$ durch Integration. Es ist

$$\Phi(x, y) = \int v_2(x, y) dy = \int 4x^2 e^{2xy} + 1 dy = 2xe^{2xy} + y + c_1(x)$$

Für die partielle Ableitung nach x muss daher gelten

$$\partial_x \Phi(x, y) = 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} + \partial_x c_1(x).$$

Da Φ gleichzeitig das Potential zu \vec{v} sein soll, muss gleichzeitig $\partial_x \Phi(x, y) = v_1(x, y)$ gelten. Es muss also,

$$2e^{2xy} + 4xye^{2xy} + \partial_x c_1(x) = 2(1 + 2xy)e^{2xy}.$$

Dies gilt für $\partial_x c_1(x) = 0$ erfüllt und damit für jedes $c_1(x) = c$ konstant. Es ist also zum Beispiel $\Phi(x, y) = 2xe^{2xy} + y$ ein geeignetes Potential.