

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 48:

Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2y - y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial D} f \cdot d\vec{s}$

- (a) direkt und
- (b) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 49:

Berechnen Sie das Integral

$$\int_B (xy + yz + zx) d(x, y, z), \quad B = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

- (a) direkt und
- (b) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 50: Gegen seien $\vec{\omega}(x, y, z) = (x, y, 1)^T$ und

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2 \text{ und } 0 < z < x + y + 3\}$$

- (a) Skizzieren Sie den Körper K .
- (b) Parametrisieren Sie die drei Flächen F_1, F_2 und F_3 die K beranden.
- (c) Berechnen Sie $\iiint_K \nabla \cdot \vec{\omega} d\tau$ sowie den Fluss durch die drei Flächen aus b) und bestätigen Sie damit den Divergenzsatz im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 51:

Es sei γ eine positiv orientierte Parameterisierung des Bogens, welcher durch Schneiden des Zylinders $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ entsteht. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} (-y^3, x^3, -z^3) \cdot d\vec{s}$$

- (a) direkt und
- (b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 52:

Es sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (1, xz, xy)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_M f \cdot \vec{N} do$$

- (a) direkt und
- (b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 49, 51 und 52 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.