

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 53:

Berechnen Sie mit Hilfe der Zylinderkoordinaten:

- (a) $\int_A xyz \, d(x, y, z)$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$
(b) $\int_B z(x^3 + xy^2) \, d(x, y, z)$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\pi \leq z \leq \pi, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \left|\frac{y}{x}\right| \leq 1\}$

Aufgabe 54:

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- (a) $\int_A (x^2 + y^2)^2 e^{2(1-z)^7} \, d(x, y, z)$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq (1-z)^2\}$
(b) $\int_B \sin(z) \, d(x, y, z)$, $B = \{x, y, z \geq 0, x + y + 2z \leq 1\}$

Aufgabe 55:

Es sei $0 < r < R$. Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationstoruses

$$\mathbb{T}_r^R = \{((R + r \cos(\vartheta)) \cos(\varphi), (R + r \cos(\vartheta)) \sin(\varphi), r \sin(\vartheta)) : \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi)\}.$$

Aufgabe 56:

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $R > \rho > 0$ und $n \in \{2, 3\}$, sowie $K(\vec{0}, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$. Entscheiden Sie ob der Grenzwert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K(\vec{0}, R) \setminus K(\vec{0}, \rho)} \|\vec{x}\|^\alpha \, d\vec{x}.$$

existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

Aufgabe 57:

Betrachten Sie den Kegel $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$, sowie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(x, y, z) = (z, y, z + 1)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes f durch die Oberfläche des Kegels C nach Außen:

$$\iint_{\partial C} f \cdot \vec{N} \, d\sigma$$

Aufgabe 58:

Sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, $R > 0$ und $I = [a, b]$. Ferner sei $f \in C^1(\overline{K}(\vec{x}_0, R) \times I)$, $r \in C^1((a, b), (0, R))$ und $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $u(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{x}_0$. Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt} \iiint_{K(\vec{x}_0, r(t))} f \, d\tau = \iiint_{K(\vec{x}_0, r(t))} \frac{\partial f}{\partial t} \, d\tau + \frac{r'(t)}{r(t)} \iint_{\partial K(\vec{x}_0, r(t))} f u \cdot \vec{N} \, d\sigma,$$

für alle $t \in (a, b)$ (Reynolds'scher Transportsatz für Kugeln).

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 54, 56 und 58 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.