Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

SS23

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösung zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 53:

(a) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_A xyz\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\cos(\varphi)\rho\sin(\varphi)z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^1 z\mathrm{d}z\cdot\int_0^{2\pi}\cos(\varphi)\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\cdot\frac{1}{4}=0\end{aligned}$$

(b) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_B z(x^3+xy^2)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{-\pi}^{\pi} z\int_1^2\rho^3\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi+\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z\\ &= 0\cdot\frac{7}{5}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)=0\end{aligned}$$

Aufgabe 54:

(a) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_A (x^2+y^2)^2e^{2(1-z)^7}\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-z}\rho^4e^{2(1-z)^7}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\int_0^1 e^{2(1-z)^7}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_{\rho=0}^{\rho=1-z}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}\int_0^1 e^{2(1-z)^7}(1-z)^6\mathrm{d}z\\ &\overset{x=1-z}{=} \frac{\pi}{3}\int_0^1 e^{2x^7}x^6\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{14}\cdot\left[e^{2x^7}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{\pi}{42}(e^2-1)\end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Satz von Fubini (vgl. Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}\int_B \sin(z)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\frac{1-x-y}{2}}\sin(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x=-\int_0^1\int_0^{1-x}\left[\cos(z)\right]_{z=0}^{z=\frac{1-x-y}{2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\int_0^{1-x}1-\cos\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)+2\left[\sin\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1(1-x)-2\sin\left(\frac{1-x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-4\left[\cos\left(\frac{1-x}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=1}=-\frac{7}{2}+4\cos\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 55:

Betrachte die Abbildung $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(\varphi,\vartheta)=((R+r\cos(\vartheta))\cos(\varphi),(R+r\cos(\vartheta))\sin(\varphi),r\sin(\vartheta))$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Wir zeigen: F ist injektiv auf $[0, 2\pi)^2$: Seien dazu $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ und $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 2\pi)$ mit $F(\varphi_1, \vartheta_1) = F(\varphi_2, \vartheta_2)$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \ni (F_1(\varphi_1, \vartheta_1), F_2(\varphi_1, \vartheta_1)) &= \underbrace{(R + r\cos(\vartheta_1))}_{>0}(\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1)) \\ &= \underbrace{(R + r\cos(\vartheta_2))}_{>0}(\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2)) = (F_1(\varphi_2, \vartheta_2), F_2(\varphi_2, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Wegen der Bijektivität der Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ gilt $\varphi_1 = \varphi_2$ und $(R + r\cos(\vartheta_2)) = (R + r\cos(\vartheta_2))$. Mit $F_3(\varphi_1, \vartheta_1) = F_3(\varphi_2, \vartheta_2)$, folgt weiter

$$\begin{aligned} r\cos(\vartheta_1) &= r\cos(\vartheta_2), \\ r\sin(\vartheta_1) &= r\sin(\vartheta_2). \end{aligned}$$

Wieder folgt mit der Bijektivitat der Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$, dass $\vartheta_1 = \vartheta_2$ gilt. Damit hat sich F als injektiv auf $[0, 2\pi)^2$ erwiesen.

Es gilt

$$F'(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)(R + r\cos(\vartheta)) & -r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi)(R + r\cos(\vartheta)) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 & r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$\sqrt{\det\left(F'(\varphi, \vartheta)^T \cdot F'(\varphi, \vartheta)\right)} = \sqrt{\begin{vmatrix} (R + r\cos(\vartheta))^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix}} = r(R + r\cos(\vartheta)) > 0$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ und damit ist $\operatorname{rg}(T'(\varphi, \vartheta)) = 2$ für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Definiere $U = (0, 2\pi)^2$, sowie $N_1 = \{F(\varphi, 0) : \varphi \in (0, 2\pi)\}$, $N_2 = \{F(0, \vartheta) : \vartheta \in (0, 2\pi)\}$ und $N_3 = \{F(0, 0)\}$. Es ist $N_1 \subseteq F((0, 2\pi) \times (-\pi, \pi))$, $N_2 \subseteq F((-\pi, \pi) \times (0, 2\pi))$ und $N_3 \subseteq F((-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi))$. Damit gilt nach Abschnitt 20.6 der Vorlesung:

$$\begin{aligned} o(N_1) &= \int_{(0,2\pi)\times\{0\}} 1 \cdot \sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T F'(\varphi, \vartheta))} \mathrm{d}(\varphi, \vartheta) = 0 \\ o(N_2) &= \int_{\{0\}\times(0,2\pi)} 1 \cdot \sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T F'(\varphi, \vartheta))} \mathrm{d}(\varphi, \vartheta) = 0 \\ o(N_3) &= \int_{\{0\}\times\{0\}} 1 \cdot \sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T F'(\varphi, \vartheta))} \mathrm{d}(\varphi, \vartheta) = 0 \end{aligned}$$

Also ist $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ eine o-Nullmenge. Es ist ferner $\mathbb{T}_r^R = F(U) \cup N$. Wieder nach Abschnitt 20.6 der Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned} o(\mathbb{T}_r^R) &= \int_{F(U)} \mathrm{d}\sigma = \int_U \sqrt{\det(F'(\varphi, \vartheta)^T F'(\varphi, \vartheta))} \mathrm{d}(\varphi, \vartheta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + \cos(\vartheta)) \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + \cos(\vartheta)) \mathrm{d}\vartheta = 4\pi^2 rR \end{aligned}$$

Aufgabe 56:

Wir machen eine Fallunterscheidung nach der Dimension n:

- $n = 2$: Mit Hilfe der Polarkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus K(\vec{0},R)} \|\vec{x}\|^\alpha \,\mathrm{d}\vec{x} &= \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \rho^\alpha \rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_R^\infty \rho^{\alpha+1} \mathrm{d}\rho \\
&= \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha+2} \left[\rho^{\alpha+2}\right]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha \neq -2, \\ 2\pi \left[\log(\rho)\right]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha = -2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{2\pi}{\alpha+2} R^{\alpha+2} & \text{für } \alpha < -2, \\ \infty & \text{für } \alpha \geq -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

- $n = 3$: Mit Hilfe der Kugelkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus K(\vec{0},R)} \|\vec{x}\|^\alpha \,\mathrm{d}\vec{x} &= \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^\alpha \rho^2 \cos(\theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = 4\pi \int_R^\infty \rho^{\alpha+2} \mathrm{d}\rho \\
&= \begin{cases} \frac{4\pi}{\alpha+3} \left[\rho^{\alpha+3}\right]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha \neq -3, \\ 4\pi \left[\log(\rho)\right]_{\rho=R}^\infty & \text{für } \alpha = -3 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{4\pi}{\alpha+3} R^{\alpha+3} & \text{für } \alpha < -3, \\ \infty & \text{für } \alpha \geq -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 57:

(a) Eine reguläre Parameterisierung $\Phi : (0, 2\pi) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3$ (bis auf die σ-Nullmenge $N = \{(0,0,1)\}$) der Fläche M ist durch

$$\Phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in (0, 2\pi)$ und alle $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gegeben. Wir berechnen vorbereitend das vektorielle Oberflächenelement (vgl. Abschnitt 21.8 des Skriptes)

$$\begin{aligned}
\vec{n}\mathrm{d}\sigma((\varphi,\theta)) &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)(\varphi,\theta)\mathrm{d}(\varphi,\theta) \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)) \end{pmatrix} \mathrm{d}(\varphi,\theta) \\
&= \cos(\theta)\Phi(\varphi,\theta)\mathrm{d}(\varphi,\theta)
\end{aligned}$$

für alle $(\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2})$. Es gilt mit der Definition des Oberflächenintegrals (vgl. Abschnitt 20.5 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_M f(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})\mathrm{d}\sigma(\vec{x}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \cos(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\cos(\varphi) + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\cos^3(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\left[-\sin(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} + \cos^3(\theta)\sin(\theta)\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\theta = 0
\end{aligned}$$

(b) Eine positiv orientierte Parameterisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ des Randes ∂M von M ist durch

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ gegeben. Es gilt

$$\gamma(\varphi)' = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ferner liefert die *„Technik des scharfen Hinsehens"*™, dass für $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x, y, z) = (\frac{xz^2}{2}, \frac{x^2y}{2}, y)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$\nabla \times F = (1, xz, xy)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt. Es folgt mit dem Satz von Stokes (vgl. Abschnitt 20.8 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_M f(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x}) &= \int_M (\nabla \times F(\vec{x})) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x}) \\
&\overset{\text{Stokes}}{=} \int_\gamma F(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(0, \frac{\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)}{2}, \sin(\varphi)\right) \cdot (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0) \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3(\varphi)\sin(\varphi)}{2} \mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{1}{8} \left[\cos^4(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 58:

Sei zunächst $t \in (a, b)$ fest. Wegen $r(t) > 0$ ist die Abbildung $\Phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\Phi_t(\vec{y}) = \vec{x}_0 + r(t)\vec{x}$ bijektiv, stetig differenzierbar mit $\det(\Phi_t'(\vec{y})) = r^3(t) > 0$ für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere ist $\Phi_t'(\vec{y})$ regulär für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Ferner ist $\Phi_t(K(\vec{0}, 1)) = K(\vec{x}_0, r(t))$ Nach dem Transformationssatz (vgl. Abschnitt 19.7 der Vorlesung) gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{K(\vec{x}_0, r(t))} f(\vec{x}, t) \mathrm{d}\vec{x} &= \int_{\Phi_t(K(\vec{0},1))} f(\vec{x}, t) \mathrm{d}\vec{x} \\
&= \int_{K(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}), t) \left|\det(\Phi_t'(\vec{y}))\right| \mathrm{d}\vec{y} \\
&= r^3(t) \int_{K(\vec{0},1)} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y}, t) \mathrm{d}\vec{y}
\end{aligned}$$

Die Menge $\overline{K}(\vec{0}, 1)$ ist beschränkt und abgeschlossen, also, nach dem Satz aus Abschnitt 18.17 der Vorlesung, kompakt. Ferner ist für jedes $t \in (a, b)$ die Abbildung $\vec{y} \mapsto f(\Phi_t(\vec{y}), t)$ stetig. Nach Abschnitt 18.17 der Vorlesung ist also $\vec{y} \mapsto f(\Phi_t(\vec{y}), t)$ beschränkt auf $\overline{K}(\vec{0}, 1)$. Deshalb existiert das Integral

$$\int_{K(\vec{0},1)} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y}, t) \mathrm{d}\vec{y}$$

für jedes $t \in (a,b)$. Die Abbildung $(\vec{y},t) \to f(\Phi_t(\vec{y}),t)$ ist stetig differenzierbar für alle $(\vec{y},t) \in D := K(\vec{0},1) \times (a,b)$ und es gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\Phi_t(\vec{y}),t) = \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \cdot \vec{y} r'(t) + \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t)$$

für alle $(\vec{y},t) \in D$. Da (a,b) offen ist, existiert für jedes feste $s \in (a,b)$ ein $\delta_t > 0$ mit $I_s := [s-\delta, s+\delta] \subseteq (a,b)$. Da $r \in C^1((a,b))$ und I_s kompakt ist, ist r' beschränkt auf I_s. Da $f \in C^1(\overline{D})$, ist f' beschränkt auf $\overline{D}$. Also existiert eine Konstante C derart, dass

$$\left| \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \cdot \vec{y} + \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \right| \leq C$$

für alle $(\vec{y},t) \in K(\vec{0},1) \times I_s$ ausfällt. Insbesondere ist

$$\int_{K(\vec{0},1)} \left| \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \cdot \vec{y} + \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \right| \mathrm{d}\vec{y} \leq C \frac{4}{3}\pi$$

für alle $t \in I_s$. Nach dem Satz über die Differentiation von Parameterintegralen (vgl. Abschnitt 19.4 der Vorlesung), ist

$$t \mapsto \int_{K(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}),t) \mathrm{d}\vec{y}$$

differenzierbar auf (a,b) und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r^3(t) \int_{K(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}),t) \mathrm{d}\vec{y} \quad &= \quad 3r'(t) r^2(t) \int_{K(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}),t) \mathrm{d}\vec{y} \\
&\quad + r^3(t) \int_{K(\vec{0},1)} \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \cdot \vec{y} + \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \mathrm{d}\vec{y} \\
&\overset{\text{Satz 19.7}}{=} \int_{K(\vec{x}_0,r(t))} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x},t) \mathrm{d}\vec{x} \\
&\quad + r'(t) \int_{K(\vec{x}_0,r(t))} \frac{3}{r(t)} f(\vec{x},t) \mathrm{d}\vec{x} + \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x},t) \cdot \frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{r(t)} \mathrm{d}\vec{x}
\end{aligned}$$

für alle $t \in (a,b)$. Schließlich gilt

$$\frac{3}{r(t)} f(\vec{x},t) \mathrm{d}\vec{x} + \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x},t) \cdot \frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{r(t)} = \nabla_{\vec{x}} \cdot \left(f(\vec{x},t) \frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{r(t)} \right)$$

für alle $(\vec{x},t) \in D$. Nach dem Gauß'schen Divergenzsatz aus Abschnitt 20.7 der Vorlesung gilt deshalb

$$\int_{K(\vec{x}_0,r(t))} \frac{3}{r(t)} f(\vec{x},t) \mathrm{d}\vec{x} + \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x},t) \cdot \frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{r(t)} \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\partial K(\vec{x}_0,r(t))} f(\vec{x},t) \frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{r(t)} \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x})$$

für alle $t \in (a,b)$. Dies schließt den Beweis ab.