

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 59:

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re}(f)$ oder $\operatorname{Im}(f)$ konstant, so ist schon f konstant.

Aufgabe 60:

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ferner gelte

$$\operatorname{Re}(f)^2 = \operatorname{Im}(f).$$

Zeigen Sie, dass f konstant auf G ist.

Aufgabe 61:

Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$ für welche die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind.

(a) $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|^2$,

(b) $f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \operatorname{Re}(z)$.

Klassifizieren Sie die Singularitäten (Siehe 22.11 in der Vorlesungszusammenfassung) von

(c) $g_1(z) = \frac{1}{z^5 - 4z^3}$,

(c) $g_2(z) = z \cot(z)^2$,

(c) $g_3(z) = \exp(1/(1-z))$.

Hinweis: Die Abbildung $\cot$ ist wie für reelle Werte als $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ erklärt. Beachte es gilt $\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 62:

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, auf welchen Gebieten sind sie holomorph? Bestimmen Sie ggf. f' .

(a) $f(x+iy) = \sin(x) \cos(y) - i \cos(x) \cos(y)$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(b) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$

(c) $f(z) = \begin{cases} \frac{(1+i)\operatorname{Im}(z^2)}{|z^2|} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$

Aufgabe 63:

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_{\gamma} |z|^2 dz$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ mit $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = 1+it$, $\gamma_3(t) = (1-t)+i$, $\gamma_4(t) = (1-t)i$ und $t \in [0, 1]$

(b) $\int_{\gamma} |z|^2 dz$, $\gamma(t) = (1+i)t$, $t \in [0, 1]$

(c) $\int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z} dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Aufgabe 64:

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [1, 2]$

(b) $\int_{\gamma} \bar{p}(z) dz$, $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ mit $R > 0$ und einer Polynomfunktion $p(z) = \sum_{k=0}^K a_k z^k$

(c) $\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \cos(t + \cos(t)) dt$, sowie $\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \sin(t + \cos(t)) dt$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 63, 65 und 67 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.