Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösung zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 59:
Notiere $\mathbb{C} \ni z = x + \mathrm{i}y$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sowie $f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f) = u + \mathrm{i}v$ mit $u, v : G \to \mathbb{R}$. Da f holomorph auf G ist, gelten die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen, also

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

für alle $x + \mathrm{i}y \in G$. Da nach Voraussetzung u oder v konstant ist, ist $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ oder $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$. In beiden Fällen ist $f' \equiv 0$.

Sei $z_0 \in G$ fest und $z \in G$ beliebig. Da G, aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, ein Gebiet ist, existiert ein Streckenzug $S[z_0, z_1, \ldots, z_m] \subseteq G$ mit $z_m = z$. Mit dem mehrdimensionalen Mittelwertsatz (vgl. Abschnitt 19.16 des Skriptes), existiert für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ ein $\xi_j \in S[z_j, z_{j-1}]$ und ein $\eta_j \in S[z_j, z_{j-1}]$ mit

$$u(z_j) - u(z_{j-1}) = ((z_j - z_{j-1}) \cdot \nabla)\, u(\xi_j) = 0 \text{ bzw. } v(z_j) - v(z_{j-1}) = ((z_j - z_{j-1}) \cdot \nabla)\, v(\eta_j) = 0.$$

Damit $u(z) - u(z_0) = \sum_{j=1}^m u(z_j) - u(z_{j-1}) = 0$ und $v(z) - v(z_0) = \sum_{j=1}^m v(z_j) - v(z_{j-1}) = 0$, bzw. $f(z) = f(z_0)$.

□

Aufgabe 60:
Notiere $\mathbb{C} \ni z = x + \mathrm{i}y$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sowie $f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f) = u + \mathrm{i}v$ mit $u, v : G \to \mathbb{R}$. Da f holomorph auf G ist, gelten die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen, also

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

für alle $x + \mathrm{i}y \in G$. Mit der Voraussetzung folgt

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = 2u(z)\frac{\partial u}{\partial x}(z), \text{ sowie } \frac{\partial v}{\partial y}(z) = 2u(z)\frac{\partial u}{\partial y}(z)$$

für alle $z \in G$. Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(z) &= \frac{\partial v}{\partial y}(z) = 2u(z)\frac{\partial u}{\partial y}(z) = -2u(z)\frac{\partial v}{\partial x}(z) = -4u^2(z)\frac{\partial u}{\partial x}(z), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(z) = 2u(z)\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 2u(z)\frac{\partial v}{\partial y}(z) = -4u^2(z)\frac{\partial u}{\partial y}(z) \end{aligned}$$

für alle $z \in G$. Damit ist $\nabla u(z) = 0$ für alle $z \in G$. Da G ein Gebiet ist, ist u konstant auf G. Mit Aufgabe 56 folgt, dass dann auch f konstant sein muss.

□

Aufgabe 61:

a) Wir zeigen, dass f nur $z = 0$ differenzierbar ist. Es ist

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\overline{(z+z_0)}(z-z_0) + 2\,\mathrm{Im}(\overline{z}z_0)}{z - z_0} = 2\overline{z_0} + \lim_{z\to z_0} \frac{2\,\mathrm{Im}(\overline{z}z_0)}{z - z_0}$$

Für $z_n = z_0 + 1/n$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,\mathrm{Im}(|z_0|^2 + z_0/n)}{1/n} = 2\,\mathrm{Im}(z_0)$$

aber für $z_n = z_0 + i/n$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,\mathrm{Im}(|z_0|^2 + iz_0/n)}{i/n} = -i2\,\mathrm{Re}(z_0)$$

und beide Grenzwerte können nur $z_0 = 0$ übereinstimmen. Wir prüfen noch den Fall $z_0 = 0$. Es ist

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z\to z_0} \overline{z} = 0$$

und damit ist f in $z_0 = 0$ differenzierbar.

b) Wir prüfen die Differenzierbarkeit mit den Cauchy-Riemann DGL. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ und $x, y \in \mathbb{R}$ und $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dann ist für $f(z) = \mathrm{Re}(z) = x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 1 \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

und damit ist f nirgends differenzierbar.

c) Um die Singularitäten zu klassifizieren bestimmen wir die Nulstellen von $z^5 - 4z^3$. Es ist $z^5 - 4z^3 = z^3(z^3 - 4) = z^3(z+2)(z-2)$ und damit sind $z = \pm 2$ einfache Nulstellen und damit nach Vorlesung Pole 1. Ordnung und $z = 0$ ist eine dreifache Nulstelle und damit nach Vorlesung ein Pol 3. Ordnung.

d) Beachte es ist

$$g_2(z) = z\cot(z)^2 = z(1/\sin^2(z) - 1)$$

und $\sin^2(z) = 0$ genau dann wenn $z \in n\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$. Wir bestimmen die Ordnung der Singularität und unterscheiden die Fälle $z = 0$ und $z \neq 0$. Wir beginnen mit $z \in n\pi$ für $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Wir vermuten, dass es sich um einen Pol 2. Ordnung handelt, da wir duch $\sin^2$ teilen und sin um $z = n\pi$ in erster Näherung linear ist. Es ist durch substistution $u = z - n\pi$

$$\lim_{z\to n\pi} (z - n\pi)^2 z(1/\sin^2(z) - 1) = \lim_{u\to 0} u^2(u - n\pi)(1/\sin^2(u - n\pi) - 1).$$

Daher reduziert sich das Problem darauf den Grenzwerz $\lim_{u\to 0}\frac{u^2}{\sin(u)^2}$ zu bestimmen. (Multipliziere den Ausdruck oben aus und überlege was im Grenzfall noch unklar ist) Beachte L'hospital haben wir für holomorphe Funktionen nicht besprochen. Es ist aber trivialerweise

$$\lim_{u\to 0}\frac{u^2}{\sin(u)^2}=\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin(u)-\sin(0)}{u-0}\right)^{-2}=\cos(0)^{-2}=1$$

mit der Definition der Ableitung und der Information, dass x^{-2} bei $x=1$ stetig ist. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)^1 z(1/\sin^2(z)-1)$$

divergiert um zu folgern, dass es sich nicht um einen Pol 1. Ordnung sondern um einen Pol 2. Ordnung handelt. Das Problem reduziert sich wieder auf die Frage ob

$$\lim_{u\to 0}u/\sin^2(u)$$

existiert. Analog zu eben ist

$$\lim_{u\to 0}u/\sin^2(u)=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin(u)}\sin(u)^{-1}=\lim_{u\to 0}\frac{u-0}{\sin(u)-\sin(0)}\sin(u)^{-1}.$$

Beachte der Bruch konvergiert wie eben gegen 1, ist also beschränkt aber $\sin(u)^{-1}$ divergiert, also divergiert auch das Produkt. Es handelt sich insgesamt um einen Pol 2. Ordnung.

e) In diesem Fall handelt es sich um eine isolierte Singularität bei $z=1$. Die Singularität ist weder hebbar noch ein Pol nter Ordnung. Es handelt sich ume eine wesentliche Singularität. Dies sieht man einfach da nach der Defintion der exponential Funktion

$$e^{\frac{1}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1-z)^{-n}$$

und damit divergiert

$$\lim_{z\to 1}(1-z)^k e^{\frac{1}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1-z)^{k-n} \tag{1}$$

für jedes feste $k\in\mathbb{N}$. Damit kann es sich nicht um einen Pol $k$ter Ordnugn handeln. Die Singularität ist trivialerweise nicht hebbar und damit ist es eine wesentliche Singularität.

Aufgabe 62:

Es sei für alle Teilaufgaben $u=\mathrm{Re}(f)$, $v=\mathrm{Im}(f)$. Komplexe Differenzierbarkeit in $z=x+\mathrm{i}y$ ist äquivalent zur reellen Differenzierbarkeit und Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen in z (vgl. Abschnitt 22.3 des Skriptes).

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \cos(x)\cos(y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\sin(x)\sin(y)\\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \sin(x)\cos(y)\\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \cos(x)\sin(y)\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x)\cos(y) = \cos(x)\sin(y) \Leftrightarrow (\cos(x) = 0) \vee (\cos(y) = \sin(y)) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \vee (y \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}) \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(x)\sin(y) = \sin(x)\cos(y) \Leftrightarrow (\sin(x) = 0) \vee (\sin(y) = \cos(y)) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in \pi\mathbb{Z}) \vee (y \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Also ist f genau auf $A = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right\}$ komplex differenzierbar und es gilt $f'(x + \mathrm{i}y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \cos(x)\cos(y) + \mathrm{i}\sin(x)\cos(y)$ für alle $z \in A$. Da für kein $z \in A$ und kein $\varepsilon > 0$ die Relation $K(z,\varepsilon) \subseteq A$ gilt, ist f auf keinem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorph.

(b) Es ist gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$f(z) = \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} = \frac{z^2 + \overline{z}^2}{|z|^2} = \frac{x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy + x^2 - y^2 - \mathrm{i}2xy}{x^2 + y^2} = 2\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 2\frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 8x\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= 2\frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -8y\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es folgt weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad &\Leftrightarrow \quad 8x\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0) \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \quad &\Leftrightarrow \quad 8y\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Also ist f genau auf $A = \{0 \neq z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re}(z) = 0) \vee (\operatorname{Im}(z) = 0)\}$ komplex differenzierbar und es gilt $f'(x + \mathrm{i}y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$ für alle $z \in A$. Da für kein $z \in A$ und kein $\varepsilon > 0$ die Relation $K(z,\varepsilon) \subseteq A$ gilt, ist f auf keinem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorph.

(c) Es ist gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$f(z) = \frac{(1 + \mathrm{i})\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2} = 2\frac{(1 + \mathrm{i})xy}{x^2 + y^2} = 2\frac{xy}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}2\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 2\frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = 2y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(y,x) = 2\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 2x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es folgt weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &\Leftrightarrow 2y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = 2x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \Leftrightarrow -y(x^2-y^2) = x(x^2-y^2)\\
&\Leftrightarrow (x=-y) \vee (x^2=y^2) \Leftrightarrow |x| = |y|\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &\Leftrightarrow 2x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -2y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \Leftrightarrow x(x^2-y^2) = y(x^2-y^2)\\
&\Leftrightarrow (x=y) \vee (x^2=y^2) \Leftrightarrow |x| = |y|
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Betrachte $z_k = (1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{k}\right)$. Klar: $z_k \to 0$ und $f(z_k) = \frac{(1+\mathrm{i})\frac{2}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = (1+\mathrm{i}) \not\to 0 = f(0)$. Also ist f unstetig bei 0 und erst recht nicht komplex differenzierbar bei 0.

Also ist f genau auf $A = \left\{0 \neq z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z)^2 = \mathrm{Im}(z)^2\right\}$ komplex differenzierbar und es gilt $f'(x+\mathrm{i}y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$ für alle $z \in A$. Da für kein $z \in A$ und kein $\varepsilon > 0$ die Relation $K(z,\varepsilon) \subseteq A$ gilt, ist f auf keinem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorph.

Aufgabe 63:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\gamma_1'(t) &= 1\\
\gamma_2'(t) &= \mathrm{i}\\
\gamma_3'(t) &= -1\\
\gamma_4'(t) &= -\mathrm{i}
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0,1]$. Nach der Definition des komplexen Kurvenintegrals (vgl. Abschnitt 22.5 des Skripts) ist folglich

$$\begin{aligned}
\int_\gamma |z|^2\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_1} |z|^2\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} |z|^2\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} |z|^2\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} |z|^2\,\mathrm{d}z\\
&= \int_0^1 t^2 \cdot 1\mathrm{d}t + \int_0^1 (1+t^2)\cdot \mathrm{i}\mathrm{d}t + \int_0^1 ((1-t)^2+1)\cdot(-1)\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t)^2\cdot(-\mathrm{i})\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 2t - 2\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^1 2t\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_{t=0}^{t=1} - 2 + \mathrm{i}\left[t^2\right]_{t=0}^{t=1}\\
&= -1+\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\gamma'(t) = (1 + \mathrm{i})$$

für alle $t \in [0,1]$. Nach der Definition des komplexen Kurvenintegrals (vgl. Abschnitt 22.5 des Skripts) ist folglich

$$\int_\gamma |z|^2 \,\mathrm{d}z = \int_0^1 2t^2 \cdot (1+\mathrm{i})\mathrm{d}t = (1+\mathrm{i})\frac{2}{3}.$$

(c) Es ist

$$\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus 0$. Die obige Potenzreihe hat Konvergenzradius $R = \infty$ (vgl. HM1). Nach Abschnitt 22.4 des Skriptes ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, holomorph auf $\mathbb{C}$. Da γ einfach geschlossen und $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz (vgl. Abschnitt 22.6 des Skriptes)

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z}\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Aufgabe 64:

(a) Es gilt

$$\gamma'(t) = 1 + 2\mathrm{i}t$$

für alle $t \in [1,2]$. Nach der Definition des komplexen Kurvenintegrals (vgl. Abschnitt 22.5 des Skripts) ist folglich

$$\int_\gamma \overline{z}\mathrm{d}z = \int_1^2 (t - \mathrm{i}t^2)\cdot(1+2\mathrm{i}t)\mathrm{d}t = \int_1^2 t + 2t^3 \mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_1^2 t^2 = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2}\right]_{t=1}^{t=2} + \mathrm{i}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=1}^{t=2} = 9 + \mathrm{i}\frac{7}{3}.$$

(b) Es gilt

$$\gamma'(t) = \mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Nach der Definition des komplexen Kurvenintegrals (vgl. Abschnitt 22.5 des Skripts) ist folglich

$$\int_\gamma \overline{p}(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{K} \overline{a_k} \int_\gamma \overline{z}^k \mathrm{d}z = \mathrm{i}R \sum_{k=0}^{K} \overline{a_k} R^k \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}kt} e^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \mathrm{i}R \sum_{k=0}^{K} \overline{a_k} R^k \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(1-k)t}\mathrm{d}t.$$

Für $k = 1$ ist $\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(1-k)t}\mathrm{d}t = 2\pi$. Für $k \neq 1$ ist $-\frac{\mathrm{i}}{1-k} e^{\mathrm{i}(1-k)t}$ eine Stammfunktion von $e^{\mathrm{i}(1-k)t}$ und folglich ist

$$\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(1-k)t}\mathrm{d}t = -\left[\frac{\mathrm{i}}{1-k} e^{\mathrm{i}(1-k)t}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

Deshalb ist $\int_\gamma \overline{p}(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}R\overline{a}_1 R^1 2\pi = 2\mathrm{i}R^2\overline{a}_1$.

(c) Betrachte

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)}\cos(t+\cos(t))\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)}\sin(t+\cos(t))\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \\
&\quad (\cos(t+\cos(t)) + \mathrm{i}\sin(t+\cos(t)))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} e^{\mathrm{i}(t+\cos(t))}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)+\mathrm{i}\cos(t)} e^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(\cos(t)+\mathrm{i}\sin(t))} e^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}} e^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Definiere $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ und $f(z) = e^{\mathrm{i}z}$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann ist f holomorph auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{C}$ und γ einfach geschlossen. Nach dem Cauchyschen Integralsatz (vgl. Abschnitt 22.6 des Skriptes) ist der Wert des obigen Integrals deswegen

$$\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}} e^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Da für $z \in \mathbb{C}$ die Äquivalenz $z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$ gilt, muss

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)}\cos(t+\cos(t))\mathrm{d}t &= 0 \text{ und} \\
\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)}\sin(t+\cos(t))\mathrm{d}t &= 0
\end{aligned}$$

gelten.