

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 65:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

(a) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$

(b) $\int_{|z|=2} e^{\frac{z}{1-z}} dz$

(c) $\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{z-\pi} dz$

Aufgabe 66:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

(a) $\int_{\partial G} \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)} dz$ mit $G = \{z \in \mathbb{C} : -3 < \operatorname{Re}(z) < 2, -2 < \operatorname{Im}(z) < 3\}$

(b) $\int_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$

(c) $\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1} dz$

Aufgabe 67:

(a) Entwickeln Sie die durch $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ für alle $z \in G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 2\}$ gegebene Funktion in eine Laurentreihe.

(b) Zeigen Sie für feste $a > 0$: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a}$

HINWEIS: Bestimmen Sie für (b) zunächst die Singularitäten des Integranden und wählen Sie einen Weg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ wobei $\gamma_1 : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(t) = t$ und γ_2 berandet einen Halbkreis vom Radius R , sodass γ ein geschlossener Weg ist. Was passiert für das Integral über γ_2 für große R ? Verwenden Sie dem Residuensatz um das Integral zu lösen.

Aufgabe 68:

(a) Entwickeln Sie die durch $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ für alle $z \in G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ gegebene Funktion in eine Laurentreihe.

(b) Zeigen Sie: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3} dx = \frac{7\pi}{16e}$

HINWEIS: Verfahren Sie ähnlich wie bei 70 (b). In diesem Fall ist es nützlich die Wege (Für $R, S > 0$)

$$\begin{aligned} \gamma_1^R : [-R, R] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_1^R(t) &= t \quad \forall t \in [-R, R] \\ \gamma_2^{(R,S)} : [0, S] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_2^{(R,S)}(t) &= -R + it, \quad \forall t \in [0, S] \\ \gamma_3^{(R,S)} : [-R, R] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_3^{(R,S)}(t) &= t + iS, \quad \forall t \in [-R, R] \\ \gamma_4^{(R,S)} : [0, S] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_4^{(R,S)}(t) &= R + i(S-t) \quad \forall t \in [0, S]. \end{aligned}$$

zu betrachten.

Aufgabe 69:

Berechnen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-(i+\varepsilon)x^2} dx$$

Aufgabe 70:

Es sei $R > 0$ und die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 seien gegeben durch

$$\gamma_1(t) = t \quad (t \in [0, R]), \quad \gamma_2(t) = Re^{it} \quad \left(t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right), \quad \gamma_3(t) = te^{i\frac{\pi}{4}} \quad (t \in [0, R]).$$

(a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz.$$

(b) Zeigen Sie

$$\int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

(c) Berechnen Sie den Wert der s.g. *Fresnel-Integrale*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sin(x^2) dx \quad \text{und} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos(x^2) dx.$$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 65, 67 und 69 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.