**Institut für Analysis**
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

SS23

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## Lösung zum 12. Übungsblatt

### Aufgabe 65:

(a) Der Integrand $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt eine einfache Polstelle bei $z_0 = 1$ und eine doppelte Polstelle bei $z_1 = -3$. Da nur $z_0$ vom Integrationsweg umlaufen wird, liefert der Residuensatz aus Abschnitt 22.12 des Skriptes

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, z_0).$$

Das Residuum berechnet sich nach Abschnitt 22.13 des Skriptes zu

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{e}{4^2}.$$

Insgesamt ist also $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{i}e\pi}{8}$.

(b) Wir berechnen die Laurententwicklung von $g(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$. Es gilt

$$g(z) = e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-1+\frac{1}{1-z}} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z-1)^{-k}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Die isolierte Singularität bei $z_0 = 1$ wird vom Integrationsweg ein Mal umlaufen. Der Residuensatz aus Abschnitt 22.12 des Skriptes liefert

$$\int_{|z|=2} e^{\frac{z}{1-z}} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(g, z_0).$$

Das Residuum ist der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ in der Laurentreihe, also $\mathrm{Res}(g, z_0) = -\frac{1}{e}$. Insgesamt ist also $\int_{|z|=2} e^{\frac{z}{1-z}} \mathrm{d}z = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{e}$.

(c) Der Integrand $h(z) = \frac{ze^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}$ besitzt eine einfache Polstelle bei $z_0 = \pi$. Diese wird vom Integrationsweg ein Mal umlaufen. Der Residuensatz aus Abschnitt 22.12 des Skriptes liefert

$$\int_{|z|=4} \frac{ze^{\mathrm{i}z}}{z-\pi} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(h, z_0).$$

Das Residuum berechnet sich nach Abschnitt 22.13 des Skriptes zu

$$\mathrm{Res}(h, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) h(z) = \pi e^{\mathrm{i}\pi} = -\pi.$$

Insgesamt ist also $\int_{|z|=4} \frac{ze^{\mathrm{i}z}}{z-\pi} \mathrm{d}z = -2\mathrm{i}\pi^2$.

**Aufgabe 66:**

(a) Der Integrand $f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+\mathrm{i})}$ besitzt einfache Polstellen bei $z_0 = 1$, $z_1 = -2$ und $z_2 = -\mathrm{i}$. Da alle Polstellen vom Integrationsweg ein Mal umlaufen werden, liefert der Residuensatz aus Abschnitt 22.12 des Skriptes

$$\int_{\partial G} \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+\mathrm{i})} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2)).$$

Die Residuen berechnen sich nach Abschnitt 22.13 des Skriptes zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_0) &= \lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = \frac{2}{3(1+\mathrm{i})} = \frac{1-\mathrm{i}}{3}, \\
\mathrm{Res}(f, z_1) &= \lim_{z\to z_1} (z - z_1)f(z) = \frac{-4}{-3(-2+\mathrm{i})} = -\frac{4(2+\mathrm{i})}{15}, \\
\mathrm{Res}(f, z_2) &= \lim_{z\to z_2} (z - z_1)f(z) = \frac{-2\mathrm{i}}{(-\mathrm{i}-1)(-\mathrm{i}+2)} = \frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5} = \frac{1+3\mathrm{i}}{5}
\end{aligned}$$

Insgesamt ist also $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} \mathrm{d}z = 0$.

(b) Der Integrand $g(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt eine einfache Polstelle bei $z_0 = 1$ und eine doppelte Polstelle bei $z_1 = -3$. Da alle Polstellen vom Integrationsweg ein Mal umlaufen werden, liefert der Residuensatz aus Abschnitt 22.12 des Skriptes

$$\int_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}(g, z_0) + \mathrm{Res}(g, z_1)).$$

Die Residuen berechnen sich nach Abschnitt 22.13 des Skriptes zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(g, z_0) &= \lim_{z\to z_0} (z - z_0)g(z) = \frac{e}{16}, \\
\mathrm{Res}(g, z_1) &= \lim_{z\to z_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z - z_1)^2 g(z) = \lim_{z\to z_1} \frac{e^z(z-1) - e^z}{(z-1)^2} = -\frac{5e^{-3}}{16}
\end{aligned}$$

Insgesamt ist also $\int_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} \mathrm{d}z = \frac{\pi\mathrm{i}}{8}(e - 5e^{-3})$.

(c) Wegen

$$h(z) = \frac{z}{e^{\mathrm{i}z} - 1} = \frac{z}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^k}{k!} - 1} = \frac{1}{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^{k-1}}{k!}}$$

für alle $z \in \mathbb{C}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, hat $h$ eine hebbare Singularität bei $z_0 = 0$. Der Integrationsweg umläuft $z_0$ ein Mal. Alle weiteren isolierten Singularitäten von $h$ bei $z_k = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ werden nicht umlaufen. Mit dem Residuensatz folgt

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{\mathrm{i}z} - 1} \mathrm{d}z = 0.$$

**Aufgabe 67:**

(a) Es gilt

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - \mathrm{i}^2} = \frac{z}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} = \frac{1}{2(z-\mathrm{i})} + \frac{1}{2(z+\mathrm{i})}$$

für alle $0 < |z - \mathrm{i}| < 2$. Ferner gilt

$$\frac{1}{z+\mathrm{i}} = \frac{1}{z-\mathrm{i}+2\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-\mathrm{i})^k}{(2\mathrm{i})^{k+1}}$$

für alle $|z - \mathrm{i}| < 2$ (geometrische Reihe). Insgesamt folgt

$$f(z) = \frac{1}{2(z-\mathrm{i})} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-\mathrm{i})^k}{(2\mathrm{i})^{k+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-\mathrm{i})^k$$

für alle $0 < |z - \mathrm{i}| < 2$ mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2(2\mathrm{i})^{k+1}} & \text{für } k \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{sonst }, \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Es gilt

$$g(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} = \frac{z^2}{(z+\mathrm{i}a)^2 (z-\mathrm{i}a)^2}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}a, -\mathrm{i}a\}$. Also sind $z_0 = \mathrm{i}a$ und $z_1 = -\mathrm{i}a$ zweifache Polstellen von $g$. Nach Abschnitt 22.13 des Skriptes, berechnet man

$$\mathrm{Res}(g, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (z - z_0)^2 g(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{2z(z+\mathrm{i}a)^2 - 2z^2(z+\mathrm{i}a)}{(z+\mathrm{i}a)^4} = -\frac{\mathrm{i}}{4a}.$$

Sei nun $R > a$, $\gamma_1^R : [-R, R] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_1^R(t) = t$ für alle $t \in [-R, R]$, sowie $\gamma_2^R(t) : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_2^R(t) = Re^{\mathrm{i}t}$ für alle $t \in [0, \pi]$. Ferner sei $\gamma^R = \gamma_1^R + \gamma_2^R$. Die isolierte Singularität $z_0$ von $g$ wird von $\gamma^R$ ein Mal umlaufen, während $z_1$ nicht umlaufen wird. Mit dem Residuensatz folgt

$$\int_{\gamma_1^R} g(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2^R} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma^R} g(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(g, z_0) = \frac{\pi}{2a}.$$

Klar $\int_{\gamma_1^R} g(z)\mathrm{d}z \xrightarrow{R\to\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$. Es ist $L(\gamma_2^R) = \pi R$, sowie

$$|g(\gamma(t))| = \left| \frac{R^2 e^{2\mathrm{i}t}}{(R^2 e^{2\mathrm{i}t} + a^2)^2} \right| \le \frac{R^2}{(R^2 - a^2)^2}$$

für alle $t \in [0, \pi]$. Nach Abschnitt 22.5 des Skriptes gilt

$$\left| \int_{\gamma_2^R} g(z)\mathrm{d}z \right| \le L(\gamma_2^R) \max\left\{ |g(z)| : z \in \gamma_2^R([0,\pi]) \right\} \le \frac{\pi R^3}{(R^2 - a^2)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Es folgt somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a}.$$

**Aufgabe 68:**

(a) Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}$$

für alle $0 < |z| < 1$. Ferner gilt

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

für alle $|z| < 1$ (geometrische Reihe), sowie

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k$$

für alle $|z| < 2$ (geometrische Reihe). Insgesamt folgt

$$f(z) = \frac{1}{2z} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k+2}}\right) z^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$$

für alle $0 < |z| < 1$ mit

$$a_k = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^{k+2}} & \text{für } k \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{sonst }, \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Zunächst beobachtet man, weil das Integral im Lebesgueschen Sinne existiert, dass

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^3} \mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^3} \mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

Sei $g(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z}}{(1+z^2)^3} = \frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^3(z-\mathrm{i})^3}$. Die isolierten Singularitäten von $g$ sind also $z_0 = -\mathrm{i}$ und $z_1 = \mathrm{i}$. Bei beiden handelt es sich um höchstens dreifache Polstellen. Für das Residuum $\operatorname{Res}(g, z_1)$ von $g$ in $z_1$ gilt deshalb nach Abschnitt 22.13 des Skriptes

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g, z_1) &= \lim_{z\to z_1} \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} (z-z_1)^3 g(z) = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^3} \\ &= \lim_{z\to z_1} \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^3} - 3\frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^4}\right) \\ &= \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{1}{2} \left(-\frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^3} - 3\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^4} - 3\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^4} + 12\frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^5}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\mathrm{i}}{8e} - \frac{6\mathrm{i}}{16e} - \frac{12\mathrm{i}}{32e}\right) \\ &= -\frac{\mathrm{i}7}{e16}. \end{aligned}$$

Seien $R > 0$, $S > 1$ und

$$\begin{aligned}
\gamma_1^R : [-R, R] \to \mathbb{C} \qquad \gamma_1^R(t) &= t \quad \forall t \in [-R, R] \\
\gamma_2^{(R,S)} : [0, S] \to \mathbb{C} \qquad \gamma_2^{(R,S)}(t) &= -R + \mathrm{i}t, \quad \forall t \in [0, S] \\
\gamma_3^{(R,S)} : [-R, R] \to \mathbb{C} \qquad \gamma_3^{(R,S)}(t) &= t + \mathrm{i}S, \quad \forall t \in [-R, R] \\
\gamma_4^{(R,S)} : [0, S] \to \mathbb{C} \qquad \gamma_4^{(R,S)}(t) &= R + \mathrm{i}(S - t) \quad \forall t \in [0, S].
\end{aligned}$$

Da $\gamma_1 - \gamma_3 - \gamma_2 - \gamma_1$ positiv orientiert, einfach und geschlossen ist und genau die isolierte Singularität $z_1$ (also nicht $z_0$) von $g$ umläuft, gilt mit dem Residuensatz aus Abschnitt 22.12 des Skriptes

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x = \int_{\gamma_1^R} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2^R} g(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3^R} g(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4^R} g(z)\mathrm{d}z + 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(g, z_1).$$

Es gilt mit der Abschätzung aus Abschnitt 22.5 des Skriptes

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2^{(R,S)}} g(z)\mathrm{d}z\right| &\le L\left(\gamma_2^{(R,S)}\right) \cdot \max\left\{|g(z)| : z \in \gamma_2^{(R,S)}([0,S])\right\} \\
&= S \cdot \max\left\{\left|g(\gamma_2^{(R,S)}(t))\right| : t \in [0,S]\right\} \\
&= S \cdot \max_{t\in[0,S]} \left|\frac{e^{-R+\mathrm{i}t}}{(-R+(t-1)\mathrm{i})^3(-R+(t+1)\mathrm{i})^3}\right| \\
&= S \cdot \max_{t\in[0,S]} \frac{e^{-R}}{|-R+(t-1)\mathrm{i}|^3 \cdot |-R+(t+1)\mathrm{i}|^3} \le \frac{Se^{-R}}{2R^3}, \\
\left|\int_{\gamma_3^{(R,S)}} g(z)\mathrm{d}z\right| &\le L(\gamma_3^{(R,S)}) \cdot \max\left\{|g(z)| : z \in \gamma_3^{(R,S)}([-R,R])\right\} \\
&= 2R \cdot \max_{t\in[-R,R]} \left|\frac{e^{-S+\mathrm{i}t}}{(t+(S-1)\mathrm{i})^3(t+(S+1)\mathrm{i})^3}\right| \\
&\le 2R \cdot \frac{e^{-S}}{(S-1)^3} \le 2R \cdot \frac{e^{-S}}{S^3}, \\
\left|\int_{\gamma_4^{(R,S)}} g(z)\mathrm{d}z\right| &\le L\left(\gamma_4^{(R,S)}\right) \cdot \max\left\{|g(z)| : z \in \gamma_4^{(R,S)}([0,S])\right\} \\
&= S \cdot \max_{t\in[0,S]} \left|\frac{e^{\mathrm{i}R-(S-t)}}{(R+(S-t-1)\mathrm{i})^3(R+(S-t+1)\mathrm{i})^3}\right| \\
&\overset{(S-t)=\tau}{\le} S \cdot \max_{\tau\in[0,S]} \frac{e^{-\tau}}{2R^3} = \frac{S}{2R^3}.
\end{aligned}$$

Für $S = R$ folgt damit („Exponentialfunktion gewinnt gegen Polynome“)

$$\int_{\gamma_2^{(R,R)}} g(z)\mathrm{d}z,\ \int_{\gamma_3^{(R,R)}} g(z)\mathrm{d}z,\ \int_{\gamma_4^{(R,R)}} g(z)\mathrm{d}z \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Damit folgt die Behauptung

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(g, z_1)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{7\pi}{e16}\right) = \frac{7\pi}{e16}.$$

**Aufgabe 69:**

Zunächst sei festgehalten, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-(\mathrm{i}+\varepsilon)x^2} \right| \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} < \infty$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Also existiert das Integral im Lebesgue-Sinne und, wegen der Punktsymmetrie des Integranden, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\mathrm{i}+\varepsilon)x^2} \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-(\mathrm{i}+\varepsilon)x^2} \mathrm{d}x = 2 \lim_{R \to \infty} \int_{0}^{R} e^{-(\mathrm{i}+\varepsilon)x^2} \mathrm{d}x$$

Sei nun $R > 0$ fest, $w := \sqrt{\varepsilon + \mathrm{i}}$, $0 < \varphi_0 := \operatorname{Arg}(w) < \frac{\pi}{4}$. Ferner seien $\gamma_1^R : [0, R] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_1^R(t) = wt$ für alle $t \in [0, R]$, $\gamma_2^R : [0, |w| R] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_2^R(t) = t$ für alle $t \in [0, |w| R]$, sowie $\gamma_3^R : [0, \varphi_0] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma_3^R(t) = R |w| e^{\mathrm{i}t}$. Da $f(z) = e^{-z^2}$ holomorph ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\begin{aligned}
\int_0^R e^{-(\mathrm{i}+\varepsilon)x^2} \mathrm{d}x &= \frac{1}{w} \int_0^R e^{-(wx)^2} w \mathrm{d}x = \frac{1}{w} \int_{\gamma_1^R} e^{-z^2} \mathrm{d}z = \frac{1}{w} \left( \int_{\gamma_2^R} e^{-z^2} \mathrm{d}z + \int_{\gamma_3^R} e^{-z^2} \mathrm{d}z \right) \\
&= \frac{1}{w} \int_{\gamma_2^R} e^{-z^2} \mathrm{d}z + \frac{1}{w} \int_{\gamma_3^R} e^{-z^2} \mathrm{d}z = \frac{1}{w} \underbrace{\int_0^{|w|R} e^{-x^2} \mathrm{d}x}_{\xrightarrow{R \to \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}} + \frac{\mathrm{i} |w| R}{w} \int_0^{\varphi_0} e^{-R^2 |w|^2 e^{2\mathrm{i}t}} e^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\mathrm{i} |w| R}{w} \int_0^{\varphi_0} e^{-R^2 |w|^2 e^{2\mathrm{i}t}} e^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t \right| &\leq R \int_0^{\varphi_0} \left| e^{-R^2 |w|^2 (\cos(2t) + \mathrm{i} \sin(2t))} \right| \mathrm{d}t \\
&= R \int_0^{\varphi_0} e^{-R^2 |w|^2 \cos(2t)} \mathrm{d}t \\
&\overset{\cos \text{ fallend auf } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}{\leq} R \int_0^{\varphi_0} e^{-R^2 |w|^2 \cos(2\varphi_0)} \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\pi}{4} R e^{-R^2 |w|^2 \overbrace{\cos(2\varphi_0)}^{>0}} \overset{\text{l'Hospital}}{\to} 0
\end{aligned}$$

ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\mathrm{i}+\varepsilon)x^2} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon + \mathrm{i}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - \mathrm{i}).$$

**Aufgabe 70:**

(a) Der Weg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$ ist einfach und geschlossen. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = e^{-z^2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist holomorph. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z) \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z) \mathrm{d}z - \int_{\gamma_3} f(z) \mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z) \mathrm{d}z = 0.$$

Dies impliziert die Behauptung.

(b) Es gilt nach Definition des komplexen Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} e^{-z^2}\mathrm{d}z\right| &= \left|\mathrm{i}R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2\mathrm{i}t}} e^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t\right| \leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|e^{-R^2(\cos(2t)+\mathrm{i}\sin(2t))}\right| \mathrm{d}t = R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos(2t)}\mathrm{d}t \\
&= R\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-R^2\cos(2t)}\mathrm{d}t + R\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos(2t)}\mathrm{d}t \\
&\leq R\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-R^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}t + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} R\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos(2t)}\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\pi}{8}Re^{-R^2\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{2}R\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t)e^{-R^2\cos(2t)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{8}Re^{-R^2\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2R}\left[e^{-R^2\cos(2t)}\right]_{t=\frac{\pi}{8}}^{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}Re^{-R^2\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2R}\left[1-e^{-R^2\frac{\sqrt{2}}{2}}\right] \xrightarrow{R\to\infty} 0
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z &= \int_0^R e^{-x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow{R\to\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z &= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-t^2 e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}\mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-\mathrm{i}t^2}\mathrm{d}t = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\int_0^R \cos(t^2)\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int_0^R \sin(t^2)\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

Mit den Ergebnissen der Aufgabenteilen (a) und (b) folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$