

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 71:

Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Hinweis: Es ist $f(x) := \operatorname{Im} \frac{e^{ix}}{x} = \frac{\sin(x)}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat eine isolierte Singularität in $z_0 = 0$. Es ist nützlich folgende Wege zu betrachten:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [-R, -\rho] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_1(t) &= t \\ \gamma_2 : [\rho, R] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_2(t) &= t \\ \gamma_\rho : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_\rho(t) &= \rho e^{i(\pi-t)}, \\ \gamma_3 : [0, S] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_3(t) &= R + it, \\ \gamma_4 : [-R, R] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_4(t) &= is + t, \\ \gamma_5 : [0, S] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_5(t) &= -R + i(s-t) \end{aligned}$$

für $0 < \rho < R$ und einen zunächst freien Parameter $S > \rho$. Beachte es ist für $R > \pi > \rho$,

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{\rho}^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \operatorname{Im} \left(\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \right)$$

. Bilden Sie die Grenzwerte $\rho \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$.

Aufgabe 72:

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(x)} dx.$$

Hinweis: Verfahren Sie ähnlich wie bei 74). Fassen Sie das Integral als komplexes Wegintegral auf für geeignete Wege. Machen Sie sich klar wo die Singularitäten sind.

Aufgabe 73:

Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten $a_k(f_j)$, $b_k(f_j)$ der Funktionen $f_1, f_2, f_3, f_4 : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(a) \quad f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } |t| < a, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für ein festes } 0 < a < \pi,$$

$$(b) \quad f_2(t) = |\cos(t)|,$$

$$(c) \quad f_3(t) = \sinh(t) \text{ und}$$

$$(d) \quad f_4(t) = \sin^2(t)$$

für jedes $t \in (-\pi, \pi]$. Für welche $t \in (-\pi, \pi]$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in (-\pi, \pi]$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig? **Hinweis:** Beachten Sie, dass die Fourierreihe gleichmäßig konvergent ist, falls die Reihe der Fourierkoeffizienten absolut konvergent ist.

Aufgabe 74:

Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten $a_k(f_j)$, $b_k(f_j)$ der Funktionen $f_1, f_2, f_3, f_4 : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

(a) $f_1(t) = |\sin(t)|$,

(b) $f_2(t) = \cosh(t)$,

(c) $f_3(t) = t(\pi - |t|)$ und

(d) $f_4(t) = e^{bt}$ für ein festes $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

für jedes $t \in (-\pi, \pi]$. Für welche $t \in (-\pi, \pi]$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in (-\pi, \pi]$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig? **Hinweis:** Beachten Sie, dass die Fourierreihe gleichmäßig konvergent ist, falls die Reihe der Fourierkoeffizienten absolut konvergent ist.

Aufgabe 75:

Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

Aufgabe 76:

Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 72, 74 und 76 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.

Erinnerung: Die Modulprüfung (Klausur) findet am Dienstag, den **12.09.2023 (Di.)** von 11:00-13:00 Uhr statt. Bitte denken Sie daran, sich rechtzeitig dafür anzumelden. ANMELDESCHLUSS ZUR KLAUSUR IST: 29.08.2023