

$(V, (\cdot|\cdot))$ SPR, $\| \cdot \| = (\cdot|\cdot)^{1/2}$ induzierte Norm.

Def: $v, w \in V$ orthogonal $\Leftrightarrow (v|w) = 0$ ($v \perp w$)

$v_1, \dots, v_n \in V$ orthogonal $\Leftrightarrow (v_j|v_k) = 0$ für $j \neq k$

$v_1, \dots, v_n \in V$ orthonormal $\Leftrightarrow v_1, \dots, v_n$ orthogonal und $\|v_j\| = 1$

$\leadsto \{v_1, \dots, v_n\}$ Orthonormalsysteme (ONS)

$\leadsto$ Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V , dann Orthonormalbasis (ONB)

Satz: $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$ orthogonal.

$\leadsto v_1, \dots, v_n$ l.u., für $v \in \text{lin}(\{v_1, \dots, v_n\})$ gilt $v = \sum_{k=1}^n (v|v_k) v_k$

Gram-Schmidt: $v_1, \dots, v_n \in V$ l.u.

$$c_1 := v_1, \quad c_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(v_k|c_j)}{\|c_j\|^2} c_j \quad (k=2, \dots, n)$$

$$b_k := \frac{c_k}{\|c_k\|}$$

$\leadsto \{b_1, \dots, b_n\}$ ONS mit $\text{lin}\{b_1, \dots, b_n\} = \text{lin}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Folgerung: V mit $\dim V < \infty$ besitzt ONB.

Def: $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$\bar{A} := (\bar{a}_{jk})$ ($= A$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$A^T := (a_{kj}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ (Transponierte)

$A^* := \bar{A}^T = \bar{A}^T$ (Adjungierte, $= A^T$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Rechenregeln: $(AB)^T = B^T A^T$, $(AB)^* = B^* A^*$, $(\alpha A + B)^T = \alpha A^T + B^T$,

$$(\alpha A + B)^* = \bar{\alpha} A^* + B^*, \quad I^T = I^* = I, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T,$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*, \quad (Ax|y) = (x|A^T y) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}),$$

$$(Ax|y) = (x|A^* y) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C})$$

Def: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: A orthogonal $\Leftrightarrow A^T A = I$ ($A^{-1} = A^T$)

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: A unitar $\Leftrightarrow A^* A = I$ ($A^{-1} = A^*$)

Def: $G \neq \emptyset$, $\cdot: G \times G \rightarrow G$ ($a \cdot b$ statt $a \cdot b$) mit

(G1) $\forall a, b, c \in G$: $(ab)c = a(bc)$ (Assoziativität)

(G2) $\exists e \in G \forall a \in G$: $ea = ae = a$ (neutr. Element)

(G3) $\forall a \in G \exists b \in G$: $ab = ba = e$ (inv. Element)

$\leadsto (G, \circ)$ Gruppe. Gruppe abelsch, wenn $ab = ba$.

Pythagoras: $v_1, \dots, v_n \in V$ orthogonal

$$\leadsto \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2 = \|v_1 + \dots + v_n\|^2$$

Def. (1) u_1, u_2 UVR von W , $u_1 \cap u_2 = \{0\}$, dann schreibe

$u_1 \oplus u_2$ statt $u_1 + u_2$ (direkte Summe)

(2) $P, Q, R: W \rightarrow W$ linear. Schreibe PQ statt $P \circ Q$. $P^0 = \text{Id}_W$

$$P(Q+R) = PQ + PR, (P+Q)R = PR + QR, \kappa(PQ) = (\kappa P)Q = P(\kappa Q)$$

(3) $\phi: W \rightarrow W$ linear, schreibe ϕw statt $\phi(w)$

(4) $P: W \rightarrow W$ linear, $P^2 = P \circ P = P$, dann heißt P Projektion, Projektor oder idempotent.