Def: $P: W \to W$ linear mit $P^2 = P$ heißt Projektion

Satz: P Projektion, $Q := I - P$, $M = \{v \in W : Pv = v\}$

(1) $Q^2 = Q$ (3) $\operatorname{Kern} P = \operatorname{Bild} Q$

(2) $\operatorname{Bild} P = M$ (4) $W = \operatorname{Bild} P \oplus \operatorname{Kern} P$

Satz: U_1, U_2 UVR, $W = U_1 \oplus U_2$, also $w = u_1 + u_2$ eindeutig mit $w \in W$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$

$\Rightarrow$ $Pw := u_1$ ist Projektion von W auf U_1 längs U_2

Satz: U UVR, $\{b_1, \dots, b_n\}$ ONB von U, $Pw := \sum_{j=1}^{n} (w \mid b_j) b_j$

$\Rightarrow$ P Projektion von W auf U längs $U^\perp$

Zudem $\|w - Pw\| \leq \|w - u\|$ für festes w und alle $u \in U$.

Satz: $S = \{u_1, u_2, \dots\}$ abz. unendliches ONS in V, $s_n(v) = \sum_{k=1}^{n} (v \mid u_k) u_k$

(1) $((v \mid u_k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} |(v \mid u_k)|^2 \leq \|v\|^2$ (Bessel)

(2) $\|v - s_n(v)\| \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} |(v \mid u_k)|^2 = \|v\|^2$

Def: S vollständig $:\Leftrightarrow$ $\|v - s_n(v)\| \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ $\forall v \in V$

Folgerung: S vollständig $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} |(v \mid u_k)|^2 = \|v\|^2$ $\forall v \in V$

$\Leftrightarrow$ $(v \mid w) = \sum_{k=1}^{\infty} (v \mid u_k)\overline{(w \mid u_k)}$ $\forall v, w \in V$

Def: $f: [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ ib.

$$\hat{f}(k) := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad (k \in \mathbb{Z})$$

k-ter Fourierkoeffizient von f

$$a_k(f) := c_k(f) + c_{-k}(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx$$

$$b_k(f) := i(c_k(f) - c_{-k}(f)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

reelle Fourierkoeff. $\rightsquigarrow$ $c_k(f) = \frac{a_k(f) - i b_k(f)}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k(f) + i b_k(f)}{2}$

Satz: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-per., stückweise glatt, so gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx) \right)$$

$$= \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (= f(x), \text{ falls } f \text{ stetig in } x)$$

Satz: $f \in C_{per}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$

(1) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 := \lim_{n \to \infty} \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2$

(2) $\|f - \sum_{|k| \geq n} \hat{f}(k) e_k\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$.