

Def:  $(V, \|\cdot\|)$  NR,  $(x_n)$  Folge in  $V$

(1)  $(x_n)$  konv.  $\Leftrightarrow \exists x_0 \in V$  (Grenzwert),  $\|x_n - x_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(2)  $(x_n)$  CF  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

(3)  $(V, \|\cdot\|)$  Banachraum  $\Leftrightarrow$  Jede CF hat Grenzwert in  $V$ .

Def:  $(V, (\cdot|\cdot))$  Hilbertraum  $\Leftrightarrow (V, \|\cdot\|)$  BR  $(\|\cdot\| = (\cdot|\cdot)^{1/2})$

Lemma:  $\|x\| \leq \|x\| \leq |x_1| + \dots + |x_p|$  ( $x = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $\|x\| = (\sum_{k=1}^p |x_k|^2)^{1/2}$ )

Satz:  $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}) \rightarrow x^{(0)} \Leftrightarrow x_j^{(n)} \rightarrow x_j^{(0)} \quad \forall j \in \{1, \dots, p\}$

Satz:  $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|)$  BR,  $(\mathbb{K}^p, (\cdot|\cdot))$  NR

Satz:  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  BR, Konvergenz  $\hat{=}$  gleichm. Konv.

Satz:  $(\ell_\infty^2, (\cdot|\cdot))$  NR mit  $(x|y) = \sum_{k=1}^\infty x_k \overline{y_k}$

Def + Satz: Determinante ist eindeutige Abbildung von  $\mathbb{K}^{n \times n}$

nach  $\mathbb{K}^n$  mit  $\det(I) = 1$ , Linearität in jeder Spalte

und Wert 0 bei zwei identischen Spalten

Satz: Nullspalte  $\Rightarrow$  Det. Null; Addition des Vielfachen einer

Spalte zu einer anderen ändert Det. nicht; Vertauschen zweier

Spalten ändert Vorzeichen;  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$  inv.;  $\det(A^T) = \det(A)$

Def: Streichen von Zeile  $j$  und Spalte  $k$  in Matrix  $A$  liefert  $A_{jk}$

Satz: (1)  $\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{jk} \det(A_{jk})$  (Entw. Zeile  $j$ )

(2)  $\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+l} a_{kl} \det(A_{kl})$  (Entw. Spalte  $l$ )  
gespiegelt (sachgerecht)

Entwickeln

Sarrus

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = \overbrace{avz + bwz + cux} - \overbrace{cvx - buz - awy}$$

Satz:  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ,  $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

Satz:  $A = (a_1, \dots, a_n)$  inv.

Cramer

$\Rightarrow Ax = b$  hat genau die Lsg.  $x_0 = A^{-1}b$

für  $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$  gilt  $x_j = \frac{\det(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}$

Satz:  $A = (a_1, \dots, a_n)$  inv.,  $b_{jk} = \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_k, a_{j+1}, \dots, a_n)$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{B}{\det(A)}$$

Def:  $a \times b := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$  Kreuzprodukt

Regeln: •  $(a \times b) \perp a, b$

•  $b \times a = -a \times b$

•  $\alpha \times (\beta b + \gamma c) = \alpha (\beta a \times b) + \alpha (\gamma a \times c)$   
 $(\alpha a + \beta b) \times c = \alpha (a \times c) + \beta (b \times c)$

•  $a \times b = 0 \iff a, b \text{ l.a.}$

•  $\det(a, b, a \times b) \geq 0$

Satz + Def •  $(a \times b \mid c) = \det(a, b, c)$

•  $\det(a, b, a \times b) = \|a \times b\|^2 \geq 0$  Spatprodukt.